

# RESSONÂNCIA EM BACIAS PORTUÁRIAS

**MANUEL JOSÉ PEREIRA PINTO**

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
**MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM HIDRÁULICA**

---

Orientador: Doutor Engenheiro Paulo Avilez-Valente

JULHO DE 2014

## **MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2013/2014**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ [miec@fe.up.pt](mailto:miec@fe.up.pt)

*Editado por*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ [feup@fe.up.pt](mailto:feup@fe.up.pt)

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2013/2014 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2014.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

À minha irmã

*"What is now proved was once only imagined"*

*William Blake*



## **AGRADECIMENTOS**

A realização deste trabalho, além de ser o término de uma das mais importantes fases da minha vida, significa a concretização de um compromisso pessoal e intelectual. Como é óbvio, a caminhada foi longe de ser solitária e, por isso, há um leque de pessoas a quem devo um sincero obrigado:

Aos meus pais, por depositarem confiança e terem investido em mim e na minha formação, pelos valores e ensinamentos transmitidos, por aplaudirem as vitórias mas serem os primeiros a levantar-me nas derrotas, por serem eles os principais responsáveis pela pessoa que sou. À minha irmã que, estranha e indiretamente me fez pôr à prova e me levou a dedicar-lhe este trabalho.

Ao Professor Avilez Valente, pela infinita disponibilidade, horas “perdidas” e paciência, pelo conhecimento e perspectivas transmitidos, porque, sem ele, a realização desta dissertação era impossível.

À D. Esmeralda, (obrigado) pelo exemplo de responsabilidade, dedicação e interesse; porque me provou que, mesmo quando as coisas caminham para o lado errado, é possível resolvê-las com boa disposição.

Aos professores com os quais me cruzei durante o percurso académico, que demonstraram que o ensino superior em Portugal é um ensino de qualidade.

À minha namorada e melhor amiga que, sem dúvida alguma, foi a pessoa mais prejudicada com o meu empenho pelo tempo de ausência. Um obrigado especial pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos, porque sem eles isto não fazia sentido nenhum. Pelos momentos passados, horas de nada e horas de tudo, vivências e histórias que mais tarde me vão trazer saudade; que, no dec, na sala de quinto, no queimódromo, nas feiras novas ou no dragão caixa, em casa do João ou em cima do palco, no amial ou na arroteia, duma maneira ou de outra me moldaram e fazem de mim o que sou hoje. Um profundo obrigado.



**RESUMO**

Este trabalho apresenta um modelo numérico para resolução da equação de Berkhoff (*mild slope equation*) aplicado ao estudo de ressonância em bacias portuárias. Esta equação traduz a propagação de ondas monocromáticas sobre fundos de suave inclinação tendo em conta os efeitos combinados da refração e difração. Não são incluídos termos dissipativos.

A resolução é feita pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) onde é discretizado um domínio de cálculo formado por elementos triangulares de 3 nós e são impostas condições nas fronteiras. O processo algébrico é realizado em ambiente MATLAB® e, com recurso à *PDE Toolbox* (*Partial Differential Equation Toolbox*), são resolvidos os problemas elíptico e de valores próprios da equação de Berkhoff para determinação da elevação da superfície livre e identificação de períodos próprios.

O modelo é testado e verificado analisando as condições de ressonância da bacia retangular aberta de Mei (1983) de onde são comparados os resultados obtidos com a solução teórica aproximada. Posteriormente, o modelo é aplicado a casos genéricos de bacias retangulares para diferentes posições de entrada e diferentes graus de largura de entrada.

Por fim, são analisadas as condições de ressonância de três portos reais de domínio complexo (Porto da Baleeira, Porto de St. Quay-Portrieux e Porto de Leixões) onde é avaliado o desempenho de cálculo do modelo a propagação das ondas longas e onde se permite ganhar sensibilidade quanto ao modo de aplicação e restrições do modelo na discretização dos domínios e condições de fronteira impostas. São testadas as capacidades e limitações do modelo.

Os resultados apresentados são em termos de amplitude de onda ou coeficiente de amplificação e velocidade normalizada dos movimentos horizontais.

**PALAVRAS-CHAVE:** hidrodinâmica marítima; ressonância; valores próprios; elementos finitos





**ABSTRACT**

This paper presents a numerical model for solving the Berkhoff equation (mild slope equation) applied to the study of harbor resonance. This equation represents the propagation of monochromatic waves over mild slope bottoms including the combined effects of refraction and diffraction. Dissipative terms are not included.

The solution is found by the Finite Element Method (FEM) where a calculation domain formed by 3 nodes triangular elements is discretized and appropriate boundary conditions should be specified. The algebraic process is carried out in MATLAB® environment and, using the PDE Toolbox (Partial Differential Equation Toolbox), the elliptical and the eigenvalues problems of the Berkhoff equation are solved established in terms of the free surface elevation and eigenperiods can be identified.

The model is tested and verified by analyzing the resonance conditions of the open rectangular basin of Mei (1983) where the obtained results are compared with the approximate theoretical solution. Subsequently, the model is applied to generic cases of rectangular basins with different positions for the harbor entrance and different degrees of closure.

Finally, the resonance conditions for three complex domain real harbors (Baleeira Harbor, Saint-Quay Port d'Armor and Leixões Harbor) are analyzed testing out the long waves propagation calculation process which allows one to gain sensitivity to the mode of application and restrictions on the discretization of the model domain and on the boundary conditions imposed. The capabilities and limitations of the model are tested.

The results are presented in terms of the wave amplitude or amplification factor and the horizontal motions normalized velocity.

**KEYWORDS:** hydrodynamics; harbor resonance; eigenvalues; finite elements



# ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS .....	V
RESUMO .....	VII
ABSTRACT .....	IX
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. PRÓLOGO .....	1
1.2. ÂMBITO E OBJETIVOS .....	1
1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	2
<b>2 ONDAS LONGAS E RESSONÂNCIA.....</b>	<b>3</b>
2.1. INTRODUÇÃO .....	3
2.2. PARÂMETROS DE DEFINIÇÃO DAS ONDAS .....	4
2.3. ONDAS DE LONGO PERÍODO.....	6
2.4. TEORIA LINEAR DAS ONDAS.....	9
2.5. RESSONÂNCIA.....	27
<b>3 MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>37</b>
3.1. INTRODUÇÃO.....	37
3.2. A EQUAÇÃO DE BERKHOFF .....	38
3.3. CONDIÇÕES FRONTEIRA.....	40
3.4. FORMULAÇÃO FRACA .....	43
3.5. DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	43
3.6. RESOLUÇÃO NUMÉRICA EM AMBIENTE MATLAB® .....	46
<b>4 RESSONÂNCIA EM BACIAS PORTUÁRIAS .....</b>	<b>51</b>
4.1. INTRODUÇÃO.....	51
4.2. RESSONÂNCIA EM BACIAS SIMPLES .....	52
4.3. RESSONÂNCIA EM PORTOS REAIS .....	65
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>111</b>
5.1. CONCLUSÕES.....	111
5.2. PERSPETIVAS E RECOMENDAÇÕES FUTURAS .....	112
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>113</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>117</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Onda Progressiva (Veloso Gomes 2002).....	4
Figura 2.2 - Possível registo da forma de uma onda (Dalrymple e Dean 1984) .....	5
Figura 2.3 - Forma complexa de uma onda resultante da soma de duas sinusoides (Dalrymple e Dean 1984) .....	6
Figura 2.4 – Mecanismos de geração de ondas longas (Rabinovich 2009).....	7
Figura 2.5 - <i>Tsunami</i> que abalou a Indonésia em 2004.....	8
Figura 2.6 - Espectro de frequência de ondas de superfície (Rabinovich 2009) .....	8
Figura 2.7 – Variáveis de uma secção vertical de escoamento (Avilez-Valente 2001) .....	13
Figura 2.8 – Dispersão linear de Airy (Avilez-Valente 2001) .....	18
Figura 2.9 – Celeridade da fase linear de Airy (Avilez-Valente 2001).....	18
Figura 2.10 – Velocidades e acelerações locais num fluido (Veloso Gomes 2002) .....	20
Figura 2.11 - Órbitas das partículas a baixas e altas profundidades (USACE 2002).....	22
Figura 2.12 - Órbitas das partículas para profundidades relativas muito pequenas (Veloso Gomes 2002) .....	22
Figura 2.13 – Grupo de ondas formado pela sobreposição de duas sinusoides de períodos diferentes (USACE 2002) .....	24
Figura 2.14 – Celeridade de grupo linear de Airy (Avilez-Valente 2001).....	25
Figura 2.15 – Coeficiente de empolamento linear $\alpha s$ (Avilez-Valente 2001).....	27
Figura 2.16 - Vibração da corda de uma guitarra (fotografia por Andrew Davidhazy) .....	28
Figura 2.17 - Solução teórica para a curva de resposta de uma bacia retangular, estreita, simétrica (Raichlen 1968; Ippen e Goda 1963) .....	30
Figura 2.18 - Curva de Resposta de Portos. (a) retangular a profundidade constante, (b) retangular a fundo de declive linear, (c) lados linearmente convergentes a profundidade constante, (d) lados linearmente convergentes a fundo de declive linear, (e) retangular a fundo parabólico, (f) lados parabólicos convergentes a fundo plano (Zelt 1986) .....	32
Figura 3.1 - Discretização por elementos finitos.....	44
Figura 4.1 - Domínio de cálculo para uma bacia retangular .....	52
Figura 4.2 - Curvas de resposta do modelo PDE_Berkhoff de ressonância e de Mei (1983) .....	54
Figura 4.3 – Bacia Retangular Aberta. Modo de Vibração 1 .....	55
Figura 4.4 - Bacia Retangular Aberta. Modo de Vibração 2.....	56
Figura 4.5 - Bacia retangular com entrada na primeira sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 1).....	57
Figura 4.6 - Bacia retangular com entrada na segunda sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 2) .....	57

Figura 4.7 - Bacia retangular com entrada na terceira sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 3).....	58
Figura 4.8 - Curvas de resposta do modelo numérico para bacias retangulares com diferentes posições de entrada.....	59
Figura 4.9 - Ângulo de fase para $T=141$ s de uma bacia retangular assimétrica .....	60
Figura 4.10 - Ângulo de fase da segunda harmónica de uma bacia retangular estreita e de uma bacia quadrada com entrada assimétrica.....	61
Figura 4.11 - Ângulo de fase da terceira harmónica de uma bacia retangular estreita e de uma bacia quadrada com entrada assimétrica.....	61
Figura 4.12 - Ângulo de fase da segunda harmónica de uma bacia retangular aberta.....	62
Figura 4.13 - Bacia retangular com largura de entrada $B/IW = 0.05$ (Abertura 1) .....	63
Figura 4.14 - Bacia retangular com largura de entrada $B/IW = 0.1$ (Abertura 2).....	63
Figura 4.15 - Bacia retangular com largura de entrada $B/IW = 0.2$ (Abertura 3).....	64
Figura 4.16 - Curvas de resposta do modelo numérico para bacias retangulares com diferentes graus de abertura.....	65
Figura 4.17 - Porto da Baleeira (Autor: A Terceira Dimensão) .....	66
Figura 4.18 - Porto da Baleeira. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE_Berkhoff.....	67
Figura 4.19 - Porto da Baleeira. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta.....	68
Figura 4.20 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto A .....	70
Figura 4.21 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto B .....	70
Figura 4.22 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto C .....	71
Figura 4.23 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o primeiro modo de oscilação $T=974.5$ s .....	72
Figura 4.24 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período $T=448.57$ s .....	73
Figura 4.25 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período $T=89.71$ s.....	73
Figura 4.26 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período $T=46.36$ s.....	74
Figura 4.27 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o primeiro modo de oscilação $T= 974.5$ s .....	74
Figura 4.28 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=448.57$ s (modo fundamental) .....	75
Figura 4.29 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=89.71$ s.....	75
Figura 4.30 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T= 46.36$ s .....	76
Figura 4.31 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período $T=270$ s (Adaptado de Fortes, 1993).....	77

Figura 4.32 - Porto da Baleeira. Diagrama dos movimentos horizontais para o período $T=270$ s (Adaptado de Fortes, 1993).....	77
Figura 4.33– Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período $T=270$ seg.....	78
Figura 4.34 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=270$ seg.....	78
Figura 4.35 - Porto da Baleeira. Ângulo de fase para o período $T=270$ seg.....	79
Figura 4.36 - Porto de St. Quay-Portrieux (Fonte: marinas.com).....	80
Figura 4.37 - Porto de St. Quay-Portrieux. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE_Berkhoff.....	81
Figura 4.38 - Porto de St. Quay-Portrieux. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta.....	82
Figura 4.39 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto A (marina).....	83
Figura 4.40 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto B (marina).....	84
Figura 4.41 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto C (porto antigo).....	84
Figura 4.42 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto D (porto antigo).....	85
Figura 4.43 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto E (porto antigo).....	85
Figura 4.44 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=568.7$ s (modo fundamental do porto antigo).....	87
Figura 4.45 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=407.79$ s (modo fundamental da marina).....	87
Figura 4.46 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=152.06$ s.....	88
Figura 4.47 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=45.31$ s.....	88
Figura 4.48 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=568.7$ s (modo fundamental do porto antigo).....	89
Figura 4.49 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=407.79$ s (modo fundamental da marina).....	89
Figura 4.50 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=152.06$ s.....	90
Figura 4.51 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=45.31$ s.....	90
Figura 4.52 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=400$ s (Adaptado de Fortes, 1993).....	91
Figura 4.53 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama dos movimentos horizontais para o período $T=400$ s (Adaptado de Fortes 1993).....	92
Figura 4.54 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período $T=400$ s.....	93
Figura 4.55 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=400$ s.....	93

Figura 4.56 - Porto de Leixões (Fonte: culturaldata.wordpress.com) .....	95
Figura 4.57 – Porto de Leixões. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE_Berkhoff.....	96
Figura 4.58 – Porto de Leixões. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta.....	98
Figura 4.59 – Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na entrada.....	99
Figura 4.60 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto no terminal multiusos .....	99
Figura 4.61 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na marina .....	100
Figura 4.62 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na ponte móvel .....	100
Figura 4.63 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto no terminal de contentores sul.....	101
Figura 4.64 – Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período $T=990.7$ s (modo fundamental) .....	103
Figura 4.65 – Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período $T=552.7$ s.....	103
Figura 4.66 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período $T=250$ s .....	104
Figura 4.67 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período $T=121.2$ s .....	104
Figura 4.68 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período $T=101.8$ s .....	105
Figura 4.69 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=990.7$ s.....	105
Figura 4.70 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=552.7$ s.....	106
Figura 4.71 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=250$ s.....	106
Figura 4.72 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=121.2$ s.....	107
Figura 4.73 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período $T=101.8$ s.....	107



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Parâmetros de uma onda.....	5
Tabela 2.2 – Classificação das Ondas .....	19
Tabela 2.3 - Configuração dos três primeiros modos de oscilação de uma bacia fechada e semiaberta. L – comprimento de onda (USACE 2002).....	29
Tabela 2.4 - Primeiro e segundo modo de ressonância para seis bacias de diferentes geometrias (Zelt 1986) .....	34
Tabela 4.1 - Caracterização das zonas com malha de diferente resolução para uma bacia retangular aberta.....	53
Tabela 4.2 - Valores do coeficiente de amplificação $ R $ e respectivos valores de $kl_B$ para uma bacia retangular.....	55
Tabela 4.3 – Porto da Baleeira. Identificação e resolução das zonas .....	68
Tabela 4.4 – Porto da Baleeira. Valores dos coeficientes de amplificação $ R $ em diferentes zonas do porto .....	71
Tabela 4.5 - Porto da Baleeira. Modos de oscilação .....	72
Tabela 4.6 - Porto de St Quay-Portrieux. Identificação e resolução das zonas .....	82
Tabela 4.7 - Porto de St. Quay-Portrieux. Valores dos coeficientes de amplificação $ R $ em diferentes zonas do porto .....	86
Tabela 4.8 - Porto de St. Quay-Portrieux. Modos de oscilação .....	86
Tabela 4.9 – Porto de Leixões. Identificação e resolução das zonas.....	97
Tabela 4.10 – Porto de Leixões. Modos de oscilação .....	102
Tabela 4.11 – Porto de Leixões. Valores dos coeficientes de amplificação $ R $ em diferentes zonas do porto .....	102



## SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### Caracteres Latinos

$a$  – amplitude de onda; coeficiente (*PDE Toolbox*)

$B$  – largura de entrada

$C$  – celeridade, velocidade de fase

$C_g$  – celeridade de grupo

$c$  – coeficiente (*PDE Toolbox*)

$d$  – coeficiente (*PDE Toolbox*)

$e$  – número de Nepper

$f$  – coeficiente (*PDE Toolbox*)

$\mathbf{f}$  – vetor solicitação

$g$  – aceleração da gravidade

$H$  – altura de onda

$h$  – profundidade

$i$  – unidade imaginária

$\mathbf{K}$  – matriz de rigidez

$K_r$  – coeficiente de reflexão

$k$  – número de onda

$L$  – comprimento de onda

$l_B$  – comprimento da bacia portuária

$l_w$  – largura da bacia portuária

$\mathbf{M}$  – matriz de massa

$\mathbf{n}$  – direção normal exterior

$p$  – pressão; condição fronteira dinâmica

$q$  – coeficiente (*PDE Toolbox*)

$R$  – coeficiente de amplificação, fator de amplificação (tradicional)

$R'$  – coeficiente de amplificação tendo em conta a energia na ligação porto/oceano

$\mathbb{R}$  – parte real de um domínio complexo

$r$  – coordenada radial; coeficiente (*PDE Toolbox*)

$S$  – coeficiente de amplificação tendo em conta o empolamento e a geometria

$T$  – período de onda

$u$  – componente horizontal do vetor velocidade, velocidade horizontal; solução dos problemas elíptico e de valores próprios (*PDE Toolbox*)

$\mathbf{u}$  – vetor velocidade; vetor solução (*PDE Toolbox*)

$w$  – componente vertical do vetor velocidade, velocidade vertical;

$\Delta x$  – largura do elemento da malha de elementos finitos

$\Delta y$  – largura do elemento da malha de elementos finitos

#### Caracteres Gregos

$\alpha$  – ângulo da onda incidente com a normal

$\alpha_x$  – componente horizontal da aceleração

$\alpha_z$  – componente vertical da aceleração

$\alpha_s$  – coeficiente de empolamento linear

$\alpha_{abs}$  – coeficiente de absorção

$\gamma$  – constante de Euler

$\varepsilon$  – declividade de onda

$\eta$  – elevação da superfície livre

$\eta_I$  – elevação da superfície livre para a onda incidente

$\eta_R$  – elevação da superfície livre para a onda radiada

$\boldsymbol{\eta}$  – vetor solução da elevação da superfície livre numa malha de elementos finitos

$\tilde{\eta}$  – solução aproximada da elevação da superfície livre num espaço funcional linear com continuidade

$\theta$  – ângulo de fase; ângulo da onda radiada com a normal

$\lambda$  – comprimento de onda; valor próprio

$\nu$  – viscosidade cinemática

$\nabla$  – operador gradiente

$\rho$  – massa volúmica

$\phi$  – função potencial de velocidade,  $\phi = \phi(x, y, z, t)$

$\varphi$  – função potencial de velocidade no movimento harmónico,  $\varphi = \varphi(x, y, z)$

$\varphi_0$  – função potencial de velocidade superficial no movimento harmónico,  $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$

$\psi$  – função teste

$\tilde{\psi}$  – função teste num espaço funcional linear com continuidade

$\Omega$  – domínio geométrico

$\partial\Omega$  – fronteira do domínio geométrico

$\omega$  – frequência de onda (angular)

Abreviaturas e Acrónimos

LNEC – Laboratório Nacional de Engenharia Civil

MEF – Método dos Elementos Finitos

*PDE – Partial Differential Equation*



# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. PRÓLOGO

Com a aproximação à costa, as ondas passam por diversos fenómenos de transformação representativos do estado de agitação do mar que alteram as suas características desde as suas zonas de geração até à incidência com a costa. Fenómenos como a refração, a difração, a dissipação de energia por percolação e atrito no fundo, a presença de correntes, o empolamento, a rebentação, a transferência de energia entre frequências do espectro, a reflexão, entre outros, são tão complexos como irregulares ou aleatórios, o que torna quase impossível a sua modelação conjunta. Assim sendo, a modelação matemática é utilizada para descrever aproximadamente os fenómenos mais importantes que intervêm na propagação das ondas numa dada região em estudo.

A descrição aproximada destes fenómenos formula uma teoria, que é uma aproximação da realidade. Esta realidade aproximada deve descrever convenientemente um fenómeno sob certas condições que satisfaçam as suposições feitas no seu desenvolvimento. Outro fenómeno que viole essas suposições pode ser inadequadamente descrito por essa teoria. É, portanto, fundamental que haja circunspeção e ponderação na adoção de uma teoria para que esta descreva razoavelmente bem os fenómenos de interesse (neste âmbito ondulatórios) visto o projeto de estruturas portuárias e costeiras depender da capacidade de previsão das ondas e movimentos de massas de água e do rigor das previsões destas teorias. Com base na teoria linear das ondas, a equação de Berkhoff (Berkhoff 1972) é capaz de descrever muitos dos processos de transformação de ondas tendo em conta os efeitos combinados da refração e difração. Esta equação é particularmente adequada aos estudos de ressonância em portos traduzindo a propagação de ondas monocromáticas sobre fundos de suave inclinação.

Ondas longas (ou ondas de longo período) propagam e incidem em zonas costeiras podendo ser fortemente amplificadas com ocorrência de grandes movimentos verticais e horizontais de massas de água em bacias semi-fechadas, como por exemplo portos e baías. Esta amplificação ocorre sob condições de ressonância, ou seja, o período das ondas incidentes coincide com o período de oscilação natural da bacia. É, portanto, fundamental avaliar corretamente o efeito das ondas longas, causadoras dos efeitos de ressonância que, na ocorrência de movimentos horizontais significativos, são responsáveis pelos problemas no interior dos portos com prejuízos para as embarcações e estruturas portuárias.

### 1.2. ÂMBITO E OBJETIVOS

Neste trabalho é apresentado um modelo numérico que resolve a equação de Berkhoff (conhecida na literatura anglo-saxónica como *mild slope equation*) para fundos de suave inclinação em ordem à elevação da superfície livre para análise de ressonância em bacias portuárias. A equação é resolvida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) pela facilidade de estabelecimento de um domínio e de fronteiras

arbitrárias onde são impostas condições de fronteira. O domínio é representado por uma malha de elementos triangulares (3 nós) finitos com discretizações de resolução variável.

O processo algébrico é realizado em ambiente MATLAB®, mais concretamente pela *PDE Toolbox* (*Partial Differential Equation Toolbox*) que resolve o problema elíptico da equação de Berkhoff para determinação da elevação da superfície livre e o problema de valores próprios para determinação de períodos próprios da bacia.

Os resultados são obtidos sob a forma de amplitudes de onda ou coeficientes de amplificação numa curva de resposta de uma bacia portuária e podem também ser calculadas as velocidades dos movimentos horizontais sendo representados graficamente por diagramas. A análise dos resultados permite o conhecimento de eventuais fenómenos de ressonância e a sua magnitude no interior de bacias portuárias.

### 1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é desenvolvida ao longo de cinco capítulos e um anexo.

No Capítulo 1 é feita uma descrição geral dos temas abordados neste trabalho referenciando alguns dos fenómenos tratados e o seu enquadramento. O âmbito e objetivos identificam o rumo e direção tomados. É também apresentada a estrutura do trabalho descrevendo sumariamente os tópicos falados em cada capítulo ao longo da dissertação.

No Capítulo 2 é feita a definição dos parâmetros de onda e a descrição de ondas de longo período. É igualmente enunciada a Teoria Linear das Ondas que serve de base para o estudo dos fenómenos de ressonância em bacias portuárias. O fenómeno de ressonância e ressonância em diferentes tipos de bacias são também desenvolvidos.

No Capítulo 3 é feita uma breve revisão bibliográfica dos modelos numéricos existentes. São descritas as equações e simplificações utilizadas na dedução da equação de Berkhoff bem como as condições fronteira e a discretização pelo método de elementos finitos. É apresentado o modelo de PDE\_Berkhoff utilizado assim como enunciado e descrito todo o método de resolução da *mild slope equation*. Esta parte engloba a descrição do problema elíptico e do problema de valores próprios, das condições fronteira (reflexão, radiação e geração-radiação), da componente horizontal da velocidade e, por fim, como são visualizados os resultados.

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados do modelo numérico aplicados a casos genéricos de bacias retangulares e, posteriormente, a três portos reais de geometrias complexas (Porto da Baleeira, Porte St. Quay-Portrieux e Porto de Leixões).

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais do trabalho apresentado e algumas perspetivas para trabalhos futuros.



## 2

## ONDAS LONGAS E RESSONÂNCIA

## 2.1. INTRODUÇÃO

Ondas longas, ou ondas de longo período, propagando em zonas costeiras podem ser fortemente amplificadas com ocorrência de grandes movimentos verticais e horizontais de massas de água em bacias semi-fechadas, como por exemplo portos e baías. Esta amplificação ocorre sob condições de ressonância, ou seja, quando o período das ondas incidentes coincide com o período de oscilação natural da bacia. É, portanto, fundamental avaliar corretamente o efeito das ondas longas, causadoras dos efeitos de ressonância que, na ocorrência de movimentos horizontais significativos, são responsáveis pelos problemas no interior dos portos com prejuízos para as embarcações e estruturas portuárias.

Podem-se considerar dois tipos de bacias, abertas ou parcialmente fechadas e bacias fechadas. Para estes dois tipos, as oscilações que ocorrem no interior têm denominações e características diferentes. Para o caso de uma bacia fechada, como por exemplo um lago ou uma parte isolada de um porto, as oscilações são geradas fundamentalmente por ações externas que atuam diretamente na superfície da água (pressão atmosférica ou vento) e designam-se de *seiches*. São ondas de longo período e oscilam similarmente a uma corda de guitarra ou a uma membrana elástica. Korgen (1995) descreveu as *seiches* como sendo “o movimento rítmico e balançante que os corpos de água sofrem depois de terem sido perturbados, oscilando para trás e para a frente, enquanto a gravidade e o atrito os vão gradualmente restaurando às suas posições originais de repouso”, e ocorrem nos períodos naturais de ressonância da bacia. Estes períodos próprios são determinados pela geometria e profundidade da bacia e, em bacias naturais poderá ir desde poucas dezenas de segundos até várias horas. As configurações de oscilação são conhecidas como os modos naturais ou os modos próprios de oscilação. O modo com maior período (logo com menor frequência) é o denominado modo fundamental.

No caso de uma bacia aberta ou parcialmente fechada, como portos, baías e golfos, ocorrem oscilações portuárias que são um tipo específico de *seiche* com determinadas características diferentes das que ocorrem em bacias fechadas. Uma característica das oscilações em portos é que, até movimentos verticais relativamente pequenos podem ser acompanhados por grandes movimentos horizontais, aumentando o risco de dano nos navios atracados, partindo cordas de ancoragem e afetando também vários procedimentos no porto (Miles, 1964). Ao contrário das *seiches*, que são geradas diretamente por forças externas como a pressão atmosférica, o vento, atividade sísmica, *tsunamis*, etc., as oscilações nos portos são principalmente geradas pela entrada das ondas longas através da fronteira aberta da bacia vindas do alto mar. O facto de a bacia ser aberta faz com que exista um modo anterior ao fundamental, o modo de Helmholtz, que não existe em bacias fechadas. Outra característica que distingue as oscilações em bacias abertas e em bacias fechadas é o processo de dissipação das ondas. Como foi já referido, no caso de bacias fechadas, a dissipação é levada a cabo pela força da gravidade e pelo atrito no fundo enquanto, em bacias abertas, o fenómeno de radiação das ondas pela entrada do porto, o atrito de fundo, fenómenos de rebentação e dissipação de energia junto às fronteiras são os principais meios dissipativos embora dissipem apenas uma pequena parcela da energia total das ondas.

A ressonância ocorre quando a frequência dominante da força externa combina com as frequências próprias do porto. As frequências próprias e modos associados são uma propriedade fundamental de cada bacia e são independentes das forças externas que forçam as oscilações. Pelo contrário, as amplitudes dos movimentos verticais gerados dependem fortemente da fonte de energia que os gera e podem, por conseguinte, ter uma amplificação pronunciada.

## 2.2. PARÂMETROS DE DEFINIÇÃO DAS ONDAS

Considere-se uma onda do mar, genérica, progressiva e bidimensional, representada na Figura 2.1, propagando-se na direção do eixo OX, com uma celeridade  $C$ , num fluido homogêneo, não viscoso e incompressível. Admita-se que o efeito de Coriolis devido ao movimento de rotação da Terra e a tensão superficial são desprezáveis. Admita-se ainda que a pressão em toda a extensão da superfície livre é uniforme e constante no tempo, e a configuração da onda constante no tempo e no espaço.

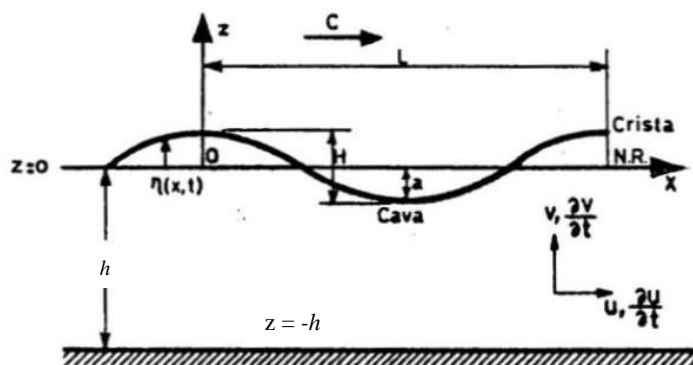


Figura 2.1 – Onda Progressiva (Adaptado de Veloso Gomes 2002)

Suponha-se ainda que o eixo OX, na Figura 2.1, pertence ao plano da superfície livre da água (de repouso inicial) e que a profundidade  $h$  é constante.

Na Tabela 2.1 estão representados os parâmetros que caracterizam este sistema de ondas.

Uma onda simples, periódica, com propagação constante sobre um fundo horizontal, pode ser completamente caracterizada pelos parâmetros altura de onda  $H$ , comprimento de onda  $L$  e profundidade  $h$ . Outros parâmetros induzidos pelas ondas, como campos de pressão, de velocidades e de acelerações das partículas no fluido, são obtidos analiticamente em função dos parâmetros básicos acima referidos aplicando as teorias existentes na literatura.

Como é representado na Figura 2.1, o ponto mais alto de uma onda é denominado de crista, enquanto o mais baixo é a cava. A distância entre uma cava e uma crista consecutivas é denominada de altura de onda  $H$ .

Uma onda deste tipo pode ser representada em função das coordenadas espacial e temporal  $x$  e  $t$ , respetivamente, ou pela sua combinação em fase, definida por  $\theta = kx - \omega t$  onde  $k$  e  $\omega$  são, respetivamente, o número de onda e a frequência angular da onda. Os valores da fase  $\theta$  variam entre 0 e  $2\pi$ .

Os parâmetros apresentados na Tabela 2.1 são os mais comumente utilizados na prática da engenharia costeira, embora haja parâmetros como declividade de onda  $\varepsilon = H/L$ , profundidade relativa  $h/L$ , altura

de onda relativa  $H/h$ , e parâmetros adimensionais que definem relações entre comprimentos como  $H/L$ ,  $H/h$  e  $h/L$ , que são também frequentemente utilizados na prática.

Tabela 2.1 – Parâmetros de uma onda

Parâmetro	Significado
Comprimento de onda	$L$ (distância entre cristas ou cavas sucessivas)
Período de onda	$T$ (intervalo de tempo correspondente ao movimento aparente de uma crista ao longo de um comprimento de onda)
Amplitude	$a = H/2$ (corresponde ao afastamento máximo da onda em relação à sua posição de equilíbrio ou de repouso)
Altura de onda	$H = 2a$ (distância vertical entre a crista e a cava)
Celeridade ou velocidade de fase	$C = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k}$ (velocidade do movimento aparente das cristas)
Número de onda	$k = \frac{2\pi}{L}$
Frequência de onda (angular)	$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Na natureza, as ondas raramente (senão nunca) são exatamente as mesmas e não se propagam sempre na mesma direção. Os mares podem ser considerados como a sobreposição de inúmeras ondas sinusoidais propagando-se nas mais diferentes direções. Concebe-se um dispositivo de registo da elevação da superfície livre  $\eta$ , colocado no meio do oceano, registando continuamente no tempo o valor da elevação da superfície livre. Graficamente, o resultado deste conjunto de registos seria do tipo representado na Figura 2.2.



Figura 2.2 - Possível registo da forma de uma onda (Dalrymple e Dean 1984)

Considere-se agora, por exemplo, duas ondas sinusoidais e a sua soma, representadas na Figura 2.3. É este tipo de sobreposição que permite o uso da análise de Fourier, ou análise harmónica clássica, e técnicas espectrais usadas na definição do oceano. Devido à aleatoriedade de fenómenos no mar, é preciso tratar certos registos como variáveis estatísticas. Por outro lado, felizmente, ondas em águas pouco profundas, parecem ser mais regulares do que ondas relativamente mais pequenas ou ondas em águas profundas, acabando por não ser um acontecimento tão aleatório e minimamente previsível. Por isso, nos casos descritos, cada onda pode ser mais facilmente descrita por uma senoide, que se repete periodicamente. Há também o caso de, na interação de ondas em águas pouco profundas, ocorrerem fenómenos do tipo não-linear.

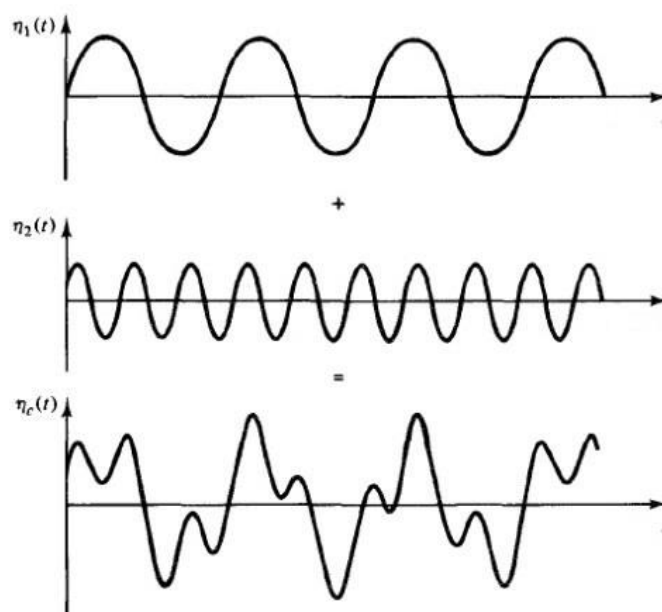


Figura 2.3 - Forma complexa de uma onda resultante da soma de duas sinusoides (Dalrymple e Dean 1984)

### 2.3. ONDAS DE LONGO PERÍODO

*“A coisa mais notável sobre ondas longas no profundo oceano é a sua ausência” (Munk 1962)*

O estudo de ondas de curto período é muito importante para a avaliação de problemas na interação com fronteiras sólidas, tais como a penetração da agitação marítima em portos, estabilidade e esforços em estruturas portuárias, em estruturas de defesa costeira e em estruturas *off-shore*, galgamento e estabilidade de quebra-mares, manobras e navegação de navios no interior de portos e o comportamento dos mesmos quando amarrados. Também as ondas de longo período podem causar problemas com consequências graves e de difícil solução. O seu estudo é importante para a engenharia portuária e costeira no projeto de portos e no estudo de estuários, de lagos, lagoas e baías naturais. De facto, os efeitos destas ondas fazem-se sentir quer em costa aberta, quer em estuários, lagos ou baías e, com especial relevância, no interior de bacias portuárias onde se podem gerar fenómenos de ressonância com consequências graves para os navios e para o próprio porto. A energia destas ondas é eficazmente refletida pelas estruturas verticais e mesmo por estruturas ou praias com declives suaves e, por isso, os portos penetrados por estas ondas podem sofrer um efeito de ressonância quando a um período destas

corresponder um período próprio da bacia, o que é, obviamente, uma situação indesejada. No caso de um estuário, a sua geometria é responsável pela forma como a propagação da maré se dá no seu interior. Quando existe ressonância, à semelhança de bacias portuárias, pode acontecer a geração de uma onda estacionária amplificando a oscilação e produzindo marés de vários metros de altura (17m na Baía de Fundy, E.U.A; 15 m na Baía de Mont Saint-Michel, França).

As ondas de longo período têm períodos compreendidos entre a dezena de segundos até à dezena de minutos e são ondas de águas pouco profundas,  $kh < \pi/4$ . Vários fenómenos de natureza diferente podem estar na origem do processo de geração destas ondas: *tsunamis*, sismos, fenómenos atmosféricos, marés e fenómenos não-lineares também denominados de ondas de infragravidade. A Figura 2.4 demonstra os mecanismos de geração de ondas longas. Note-se que maremotos ou *tsunamis*, que são ondas com períodos e comprimentos de onda extremamente longos, são ondas de águas pouco profundas, mesmo no profundo oceano. Munk, em tom de graça, disse que “a coisa mais notável sobre ondas longas no profundo oceano é a sua ausência”, o que é parcialmente correto. De facto, se situarmos as ondas de longo período num espectro de banda cujos extremos são as ondas de maré para baixas frequências e mais energéticas e as ondas geradas pelo vento para altas frequências, aquelas situam-se num “fosso” energético e relativamente vazio. Quantitativamente, por análise da Figura 2.6, verificamos que os extremos têm energias na ordem dos  $10^2 - 10^3 \text{ cm}^2$  enquanto, ao longo de toda a série intermédia de frequências, a energia é apenas na ordem dos  $10^{-1} - 10 \text{ cm}^2$ .

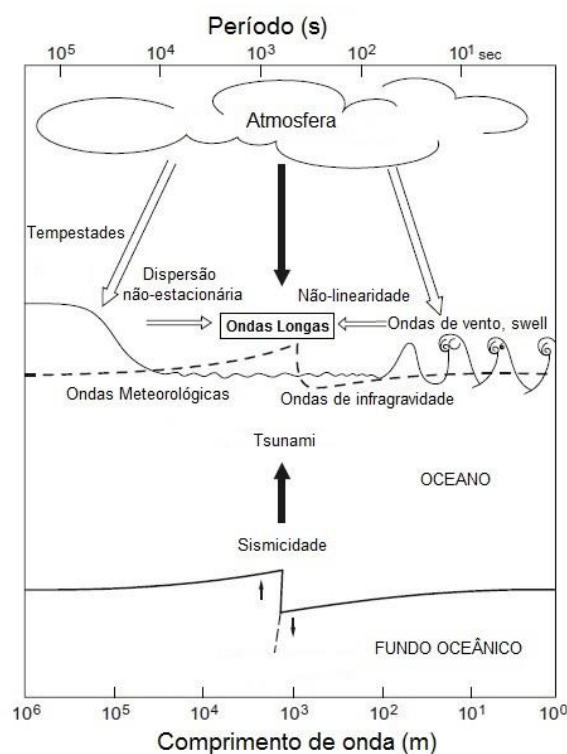


Figura 2.4 – Mecanismos de geração de ondas longas (Rabinovich 2009)

Provavelmente as mais importantes ondas longas são os *tsunamis* pelos seus impactos destruidores. O ainda recente *tsunami* da Indonésia em 2004 foi um dos eventos naturais mais mortais da história. Mais de 220 000 pessoas perderam a vida e, a nível científico e de grande público, o interesse causado por este fenómeno e por ondas longas em geral foi de uma magnitude sem precedentes. O efeito mais

destrutivo dos *tsunamis* acontece quando as ondas incidentes têm uma grande quantidade de energia na frequência ressonante, em especial na frequência do modo fundamental (caso verificado em 1964 no Port Alberni em Vancouver, no Canadá durante o “tsunami do Alasca” causando alturas de onda até 8 m).



Figura 2.5 - *Tsunami* que abalou a Indonésia em 2004

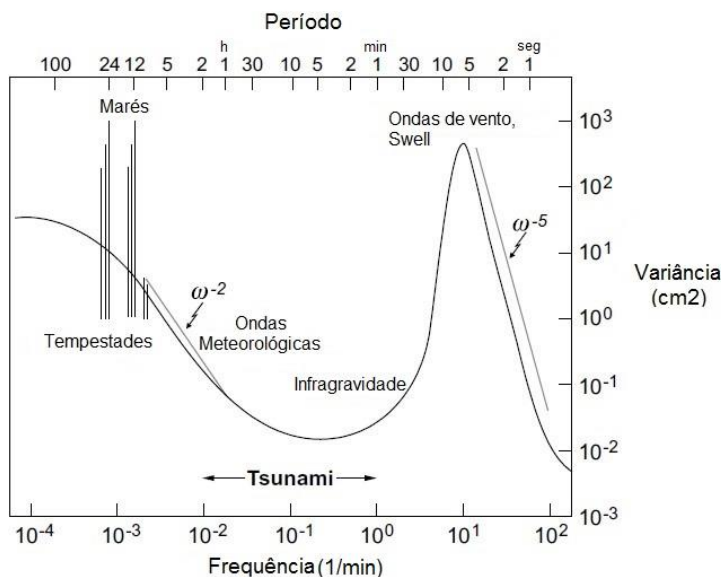


Figura 2.6 - Espectro de frequência de ondas de superfície (Rabinovich 2009)

O coeficiente de reflexão é função da declividade de onda (relação entre a altura de onda e o comprimento de onda) e, por isso, para declividades muito baixas, o coeficiente de reflexão é praticamente unitário. As ondas de longo período apresentam declividade de onda muito baixa o que faz com que, ao incidirem num obstáculo, este reflita quase na totalidade a sua energia. Isto sugere uma pequena dissipação de energia nos obstáculos refletoras fazendo com que estes sejam uma zona de dissipação de energia ineficaz. É de notar que obstáculos refletoras que constituam zonas de abrigo a portos são também eles ineficazes na proteção contra a propagação de ondas de longo período.

A configuração de uma bacia vai definir a resposta à incidência de ondas de longo período. Oscilações que levem à ressonância podem ser um problema com consequências perigosas para as estruturas portuárias e os navios nelas atracados. Os próprios períodos naturais das embarcações atracadas podem coincidir com a gama de períodos de ressonância oscilantes o que poderá levar à colisão entre navios,

quebra das cordas de ancoragem, danos nas infraestruturas, problemas nas operações de carga/descarga, etc.. Do ponto de vista da engenharia é, portanto, fundamental o estudo das ondas longas com a finalidade de avaliar a zona de interesse na determinação dos períodos próprios da bacia evitando configurações geométricas que levem a períodos de ressonância coincidentes com os períodos das ondas longas incidentes.

## 2.4. TEORIA LINEAR DAS ONDAS

*“A formulação de um problema de fronteira é simplesmente a expressão em termos matemáticos, da situação física em que apenas uma solução existe. Isto geralmente consiste em inicialmente estabelecer-se a região de interesse e a equação diferencial que deve ser satisfeita nesta região” (Dalrymple e Dean 1984)*

### 2.4.1. INTRODUÇÃO

A propagação das ondas do mar, na realidade, dá-se através de um fluido viscoso e sobre um fundo irregular com permeabilidades variáveis. Os efeitos da viscosidade da água concentram-se habitualmente em finas camadas contíguas aos limites da superfície e do fundo. Devido a esta característica, na maioria dos casos o movimento fora destas camadas limite é praticamente irrotacional. Dado que a água pode ser considerada como razoavelmente incompressível, funções corrente e potencial de velocidades podem existir para a propagação de ondas. Posteriormente, e para simplificar a análise matemática, várias outras suposições deverão e serão feitas no desenvolvimento da teoria.

As equações de Navier-Stokes regem qualquer movimento de massa de água. A propagação das ondas do mar, como ondas gravíticas e de superfície, também obedecem a estas equações. Ondas gravíticas são ondas com períodos compreendidos entre 0.3 e 30 segundos e que, independentemente da sua origem, se propagam por influência da força da gravidade. Na deslocação destas ondas há uma conversão direta entre energia potencial e energia cinética. São exemplos destas ondas os maremotos, ondas geradas pelo vento e ondas de maré.

Se considerarmos um problema de Engenharia Costeira ou Portuária, um domínio de estudo geralmente poderá ter várias dezenas de quilómetros quadrados de área horizontal enquanto, em dimensão vertical, terá no máximo algumas dezenas de metros. Fundos de cota variável, superfície livre desconhecida, fronteiras laterais incluindo a linha de costa, fronteiras abertas ao largo, estruturas de defesa costeira e estruturas portuárias tornam as fronteiras deste domínio tridimensional bastante complexas. Esta complexidade de limites faz com que a resolução analítica das acima referidas equações de Navier-Stokes seja impossível, e mesmo a sua resolução numérica com auxílio computacional reclamaria uma malha tridimensional com extremo detalhe exigindo um esforço de cálculo demasiado elevado que condicionaria a sua utilização na prática da engenharia. A abordagem comum, por isso, consiste na simplificação das equações com base em algumas hipóteses permitindo assim a dedução de uma função analítica que descreva o perfil vertical de velocidades e, posteriormente, faz-se a integração analítica segundo a vertical das equações. Deste processo resulta o modelo de propagação das ondas composto por uma equação ou sistema de equações independentes da coordenada vertical.

### 2.4.2. TEORIA LINEAR DE AIRY

Desenvolvida por Airy (1985), a teoria linear das ondas é facilmente aplicável e fornece uma aproximação razoável das características das ondas para uma vasta gama de parâmetros. Contudo, existem algumas limitações na sua aplicação dado que, para que esta se possa empregar e ser útil, se

providenciam e aceitam certas suposições adotadas na sua evolução, desde que não sejam grosseiramente desobedecidas. Assim, a Teoria Linear das Ondas baseia-se nas seguintes hipóteses:

1. o fluido é homogêneo e incompressível (densidade  $\rho$  constante);
2. a tensão superficial é desprezável;
3. o efeito de Coriolis causado pelo movimento de rotação da Terra pode ser desprezado;
4. a pressão atmosférica sobre a superfície livre é uniforme e constante;
5. o efeito da viscosidade é desprezável, i.e. fluido ideal;
6. no estudo de uma onda particular, esta não interage com quaisquer outros movimentos de água;
7. o escoamento é irrotacional pelo que as partículas de água são indeformáveis (apenas forças normais são importantes e forças tangenciais são desprezáveis);
8. o fundo do mar quase horizontal, com gradientes muito baixos, fixo e impermeável, o que implica que a velocidade vertical no fundo seja nula;
9. a amplitude de onda é pequena e a forma de onda é invariável no tempo e no espaço;
10. as ondas são bidimensionais ou planas.

A propagação de ondas gravíticas de superfície é regida pelas equações de Navier-Stokes, pelo que, excluindo os casos extremos de ondas acústicas e de capilaridade em que a escala de tempo é muito reduzida,  $T \sim 10^{-2} - 10^{-5}$  s e  $T < 10^{-1}$  s, respetivamente, e de ondas com grande escala de tempo,  $T > 1$  h, em que o efeito da rotação da Terra é relevante, se obtêm as seguintes equações para a conservação da massa e da quantidade de movimento:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$  é o vetor velocidade,  $p(\mathbf{x}, t)$  é a pressão no ponto  $\mathbf{x}$  e no instante  $t$ ,  $\rho$  é a massa volúmica,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  é o vetor posição. Considera-se um referencial ortonormado direto, sendo o eixo OZ orientado verticalmente e com sentido contrário à aceleração da gravidade.

A suposição da irrotacionalidade do escoamento viabiliza o uso da função potencial de velocidades  $\phi$ . O potencial de velocidades é uma função escalar cujo gradiente em qualquer ponto do fluido é o vetor velocidade. Assim sendo,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.3)$$

é a velocidade do fluido na direção  $x$ , e



$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.4)$$

é a velocidade do fluido na direção  $z$ . Então, sendo conhecido o potencial de velocidades  $\phi(x, z, t)$  sobre um campo de fluxo, as componentes  $u$  e  $w$  da velocidade das partículas de um fluido podem também ser conhecidas.

A teoria linear é geralmente apresentada em termos da função potencial  $\phi$ . As equações (2.1) e (2.2) de Navier-Stokes, à custa desta função potencial, podem ser reescritas no contexto de um escoamento irrotacional de um fluido não viscoso, sendo

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.5)$$

e

$$\nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right). \quad (2.6)$$

Por integração no espaço da equação (2.6) obtém-se a equação de Bernoulli relacionando o campo de velocidades com o campo de pressões no interior do fluido:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = - \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + C(t), \quad (2.7)$$

onde  $C(t)$  é uma função arbitrária de  $t$ , que pode ser considerada identicamente nula, redefinindo assim o potencial  $\phi$  sem afetar o campo de velocidades. Simplificando,

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right). \quad (2.8)$$

Deste modo, fica explícito nesta expressão que a pressão total  $p$  resulta da contribuição de um termo hidrostático

$$p_e = -\rho g z \quad (2.9)$$

e de um termo hidrodinâmico

$$p_d = -\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right). \quad (2.10)$$

### 2.4.3. CONDIÇÕES FRONTEIRA

Na segunda hipótese é referido que pode ser desprezada a tensão superficial. O fundo do mar é horizontal, fixo, fronteira impermeável, o que implica que a velocidade vertical no fundo seja nula, como é dito na sétima hipótese. Relembrando estas duas condições e ainda a não consideração de dissipação de energia por atrito de fundo, interessa considerar, na propagação de ondas de superfície, duas fronteiras: a fronteira sólida no fundo do mar e o interface água-ar na superfície livre.

Ao contrário do fundo do mar, que é uma fronteira fixa, a superfície livre da água, não suportando variações de pressão, deforma-se de maneira a que se mantenha contante a pressão à superfície. Sendo  $z = \eta(x, y, t)$ , na superfície livre, a condição fronteira para a superfície livre define-se com uma condição cinemática

$$w = \frac{dz}{dt} \Leftrightarrow w = \frac{d\eta}{dt} \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

e uma condição dinâmica

$$p = 0, \quad (2.12)$$

que pode ser substituída por uma outra condição em  $\phi$  e  $\eta$  por permuta de (2.11) e (2.12) na equação (2.8) de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + g\eta = 0 \quad (2.13)$$

se  $z = \eta(x, y, t)$ .

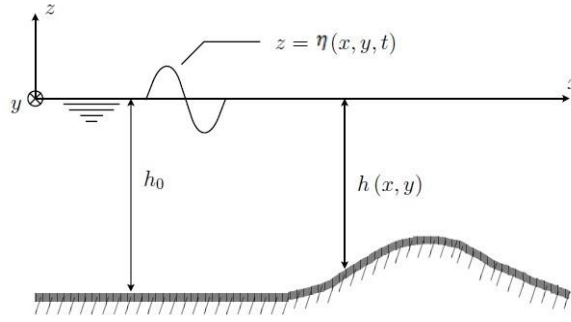


Figura 2.7 – Variáveis de uma secção vertical de escoamento (Avilez-Valente 2001)

A respeito da condição fronteira no fundo fixo, para  $z = -h(x, y)$ , a definição desta condição pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 w = \frac{dz}{dt} &\Leftrightarrow w = -\frac{d\eta}{dt} & (2.14) \\
 \Leftrightarrow w &= -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 \Leftrightarrow w &= -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}$$

Resulta então o seguinte problema não linear:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.15)$$

se  $-h(x, y) < z < \eta(x, y, t)$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + g\eta = 0 \quad (2.16)$$

se  $z = \eta(x, y, t)$ ,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

se  $z = \eta(x, y, t)$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

se  $z = -h(x, y)$ .

Uma das dificuldades ao apresentar este problema não linear é o facto de a posição da superfície livre  $\eta$  ser também ela uma incógnita. É, portanto, praticamente impossível determinar uma solução analítica para a propagação de ondas de superfície para domínios com uma configuração arbitrária.

Na oitava hipótese enumerada acima foi ainda assumido simplificativamente que a amplitude de onda é pequena em relação ao seu comprimento de onda. Tal hipótese pressupõe que a velocidade das partículas e as elevações da superfície livre são, também elas, “pequenas” ( $a \ll 1$  e  $||u|| \ll 1$ ). Pressupõe-se ainda que o gradiente de fundo é também ele muito pequeno ( $\partial h / \partial x \ll 1$  e  $\partial h / \partial y \ll 1$ ). De tal forma, produtos destas variáveis ou das suas derivadas resultando em termos não lineares podem ser desprezados face aos termos lineares. Assim, tendo em conta que

$$\phi|_{z=\eta} = \phi|_{z=0} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}|_{z=0} + \dots \quad (2.19)$$

(2.15) a (2.19) passam a ter a seguinte forma:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.20)$$

se  $-h(x, y) < z < 0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.21)$$

se  $z = 0$ ,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.22)$$

se  $z = 0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

se  $z = -h(x, y)$ .

#### 2.4.4. SOLUÇÃO HARMÓNICA

Para  $\eta$ , a solução para uma onda admitida harmónica no tempo é do tipo

$$\eta(x, y, t) = \Re (\eta(x, y) e^{-i\omega t}) \quad (2.24)$$

em que  $i$  é a unidade imaginária expressa por  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência angular de onda, sendo  $T$  o período de onda, e  $\eta = \eta(x, y)$  uma função complexa, independente no tempo, definindo a amplitude e a fase locais de onda. Sob estas circunstâncias a função potencial de velocidades  $\phi$  pode ser reescrita como

$$\phi(x, y, z, t) = \Re (\varphi(x, y, z) e^{-i\omega t}) \quad (2.25)$$

sendo  $\varphi$  uma função complexa, independente do tempo, definindo a amplitude e fase locais da onda. Obtêm-se assim, substituindo as equações (2.24) e (2.25) no problema gerado pelas equações (2.20) a (2.23), e dividindo todos os termos por  $e^{-i\omega t}$ , as seguintes equações<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.26)$$

para  $-h < z < 0$ ,

$$g\eta - i\omega\varphi = 0 \quad (2.27)$$

para  $z = 0$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + i\omega \eta = 0 \quad (2.28)$$

para  $z = 0$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.29)$$

para  $z = -h$ .

Define-se assim, para a propagação segundo o sentido positivo do eixo OX, uma onda monocromática progressiva e periódica como sendo

$$\eta = ae^{ikx} \quad (2.30)$$

---

<sup>1</sup> Nota: optou-se por suprimir o símbolo  $\Re$  doravante da equação (2.25) por conveniência de escrita.

em que  $a$  é a amplitude da onda e  $k$  o número de onda. Cumprindo concomitantemente as condições de domínio (2.26) e de fronteira de fundo (2.29), a solução para a função potencial  $\varphi$  é

$$\varphi = b \cosh[k(z + h)] e^{ikx}, \quad (2.31)$$

e, para que se cumpram as condições de fronteira na superfície livre (2.27) e (2.28), será necessário que

$$b = -i \frac{g a}{\omega} \frac{1}{\cosh kh} \quad (2.32)$$

em que  $\omega$  e  $k$  obedecem à condição de dispersão

$$\omega^2 = g k \tanh kh. \quad (2.33)$$

No conjunto destas condições obtém-se, por fim, a equação para o potencial de velocidades:

$$\varphi = -i \frac{g a \cosh[k(z + h)]}{\omega \cosh kh} e^{ikx}. \quad (2.34)$$

Para as velocidades  $u$  e  $w$ , consequentemente, obtém-se

$$u = k \frac{g a \cosh[k(z + h)]}{\omega \cosh kh} e^{ikx} e^{-i\omega t} \quad (2.35)$$

e

$$w = -ik \frac{g a \cosh[k(z + h)]}{\omega \cosh kh} e^{ikx} e^{-i\omega t}. \quad (2.36)$$

#### 2.4.5. DISPERSÃO: CELERIDADE, COMPRIMENTO DE ONDA E PERÍODO

A velocidade de propagação da crista de uma onda, como já foi visto, denomina-se de celeridade  $C$  ou velocidade de fase. Como a distância percorrida por uma onda durante um período é igual a um comprimento de onda, a celeridade pode ser expressa relacionando estas duas grandezas:

$$C = \frac{L}{T}, \quad (2.37)$$

ou então relacionando a frequência angular e o número de onda,

$$C = \frac{\omega}{k}. \quad (2.38)$$

Relacionando a celeridade com o número de onda e a profundidade temos:

$$C = \sqrt{gh \frac{\tanh kh}{kh}} \quad (2.39)$$

As relações de dispersão (2.33) e (2.39) podem ser escritas na forma adimensional como

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = \sqrt{k h \tanh kh} \quad (2.40)$$

e

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}}, \quad (2.41)$$

respetivamente.

Um meio diz-se dispersivo quando a celeridade de onda não só depende das características do meio, i.e. no caso de ondas superficiais na água, não só da profundidade  $h$ , mas também do seu número de onda  $k$ . Ondas com diferentes períodos propagam-se a diferentes velocidades. Mais do que uma onda, quanto maior o período, mais rapidamente esta se propaga. As relações de dispersão (2.40) e (2.41) da teoria linear apresentam-se graficamente na Figura 2.8 e Figura 2.9.

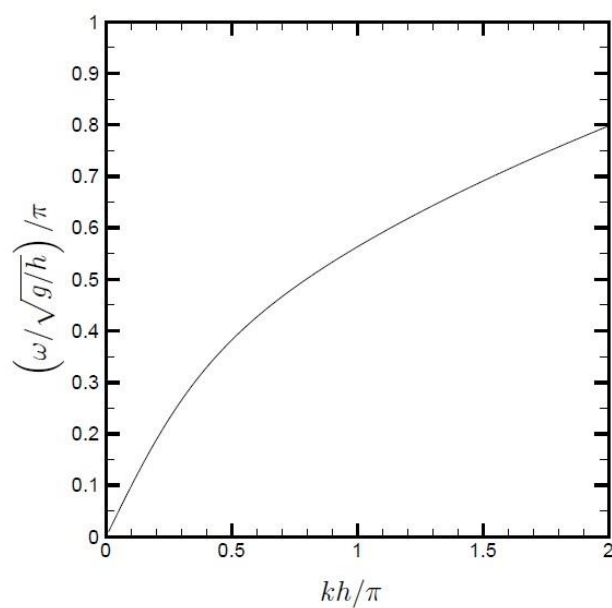


Figura 2.8 – Dispersão linear de Airy (Avilez-Valente 2001)

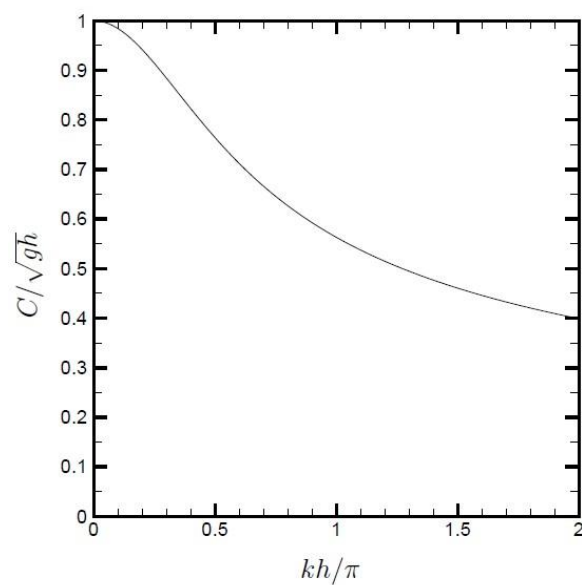


Figura 2.9 – Celeridade da fase linear de Airy (Avilez-Valente 2001)

Na prática, para valores de  $kh \ll 1$  (de facto para  $kh < \pi/2$ ), uma onda denomina-se de onda longa ou água pouco profunda, e para  $kh \gg 1$  (de facto para  $kh > \pi$ ) designa-se de onda curta ou água profunda. Na Tabela 2.2 estão classificadas as ondas com base num critério de profundidade relativa.



Tabela 2.2 – Classificação das Ondas

Classificação	$h/L$	$kh$	$\tanh(kh)$
Água profunda	De 1/2 a $\infty$	De $\pi$ a $\infty$	$\approx 1$
Transição	De 1/4 a 1/2	De $\pi/2$ a $\pi$	$\tanh(kh)$
Água pouco profunda	De 0 a 1/4	De 0 a $\pi/2$	$\approx kh$

Os valores assintóticos da celeridade de fase são, respetivamente, para águas pouco profundas e para águas profundas

$$C = \sqrt{gh} \quad (2.42)$$

para  $kh \ll 1$ , e

$$C = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega} \quad (2.43)$$

para  $kh \gg 1$ .

#### 2.4.6. ÓRBITAS DESCRITAS PELAS PARTÍCULAS

As velocidades e acelerações do fluido de estudo podem calculadas para diferentes valores de  $z$  e de  $t$  durante a propagação de uma onda. As componentes horizontal e vertical, referidas em 2.4.2, podem ser vistas da seguinte forma:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{ag}{\omega} k \frac{\cosh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \cos \theta \quad (2.44)$$

para a componente horizontal e

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{ag}{\omega} k \frac{\sinh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \sin \theta \quad (2.45)$$

para a componente vertical. As equações (2.44) e (2.45) determinam a velocidade da água em qualquer distância  $(z+h)$  acima do fundo do mar sendo aquela periódica no espaço e no tempo. O ângulo  $\theta$  representa o ângulo da fase e é dado por  $\theta = kx - \omega t$ . Para cada valor de  $\theta$ , as funções seno e cosseno hiperbólico, como funções de  $z$ , representam um decaimento exponencial aproximado das componentes da velocidade com o aumento da distância à superfície livre.

Ao derivar as componentes horizontal e vertical da velocidade em ordem ao tempo obtêm-se as acelerações nas direções correspondentes. Assim sendo,

$$\alpha_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \sin \theta \quad (2.46)$$

é a componente horizontal da aceleração e

$$\alpha_z = \frac{\partial w}{\partial t} = agk \frac{\cosh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \cos \theta \quad (2.47)$$

a componente vertical. Valores para a velocidade e aceleração nas duas componentes para vários valores de  $\theta$  são apresentados na Figura 2.10.

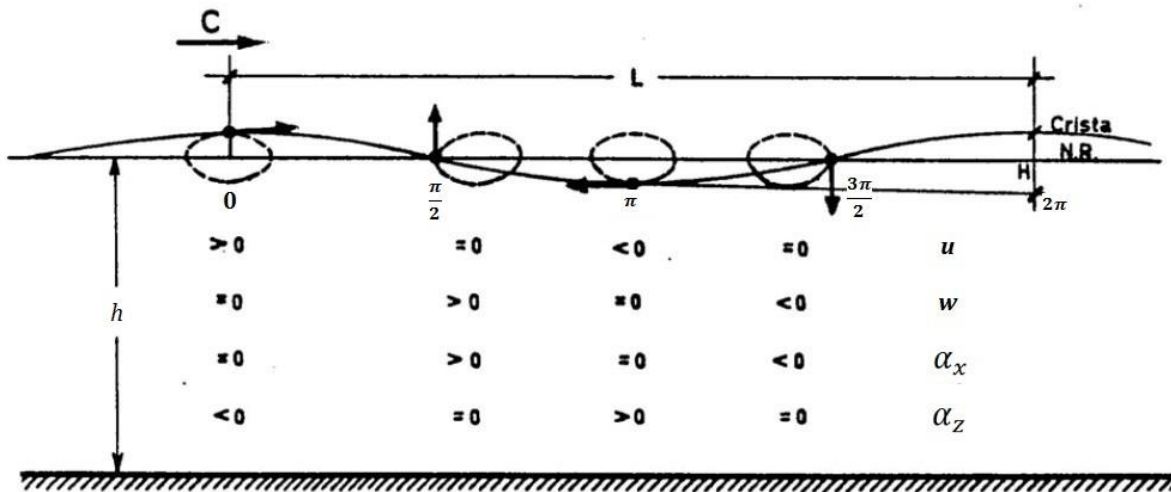


Figura 2.10 – Velocidades e acelerações locais num fluido (Veloso Gomes 2002)

De uma maneira geral, em águas pouco profundas ou em águas de transição, as partículas descrevem órbitas elíticas e em águas profundas descrevem órbitas circulares. A posição de qualquer partícula num dado instante  $t$  obtém-se por integração em ordem ao tempo das equações da velocidade (2.3) e (2.4). Então,

$$x = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x} dt = -\frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\cosh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \sin \theta \quad (2.48)$$

para a coordenada horizontal e

$$z = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial z} dt = + \frac{HgT^2}{4\pi L} \frac{\sinh[2\pi(z+h)/L]}{\cosh(2\pi h/L)} \cos \theta \quad (2.49)$$

para a coordenada vertical. Simplificadamente, quadrando e somando (2.48) e (2.49), obtém-se a equação de uma elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1, \quad (2.50)$$

em que

$$A = a \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh kh} \quad (2.51)$$

representa o semi-eixo maior de uma elipse e

$$B = a \frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh kh} \quad (2.52)$$

representa o semi-eixo menor. Os comprimentos dos dois semi-eixos são distâncias na horizontal e na vertical das trajetórias das partículas (Figura 2.11) e o quociente entre eles depende do quociente  $d/L$ . Assim sendo, as partículas previsivelmente vão-se deslocar em órbitas fechadas obedecendo à teoria linear voltando às suas posições iniciais no final de cada ciclo de onda. No entanto, testes realizados em laboratório provaram que estas órbitas não são completamente fechadas. Isto deve-se a um fenómeno conhecido como transporte de massa e prova que a teoria linear não é totalmente adequada para descrever completamente a propagação das ondas.

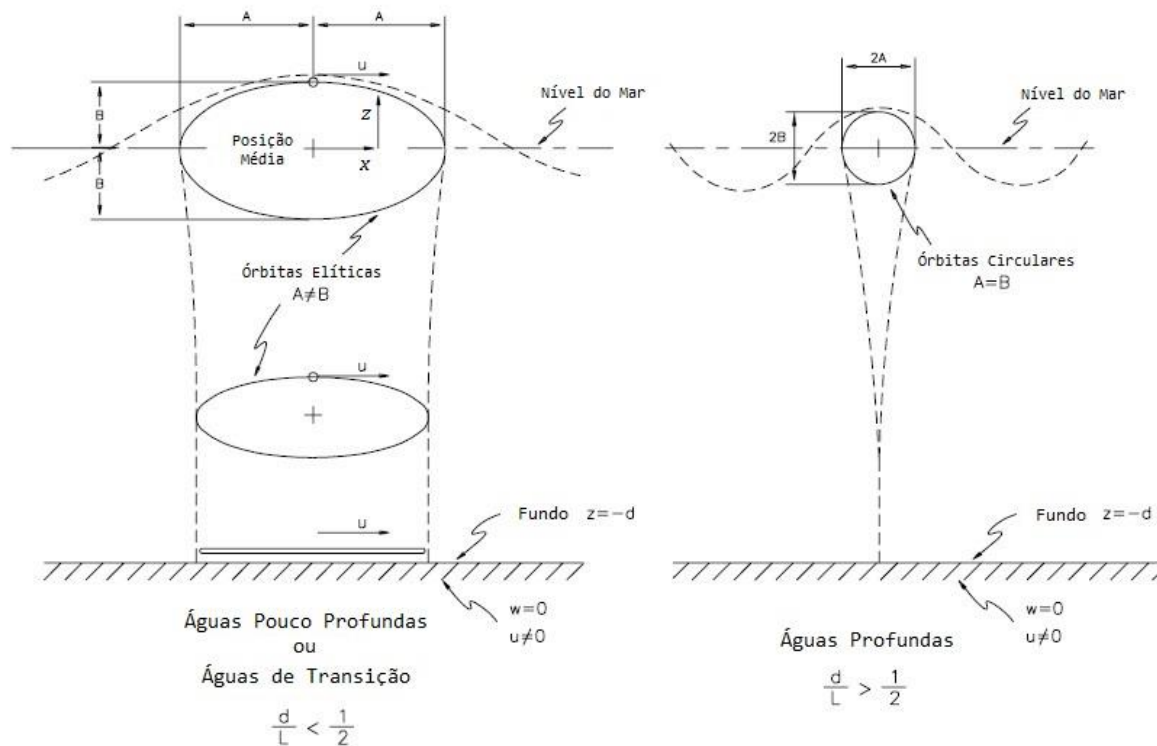


Figura 2.11 - Órbitas das partículas a baixas e altas profundidades (USACE 2002)

No caso de águas profundas, os parâmetros  $A$  e  $B$  igualam-se e as partículas percorrem uma órbita circular. Estes parâmetros são dados por

$$A = B = a e^{kz} \quad (2.53)$$

para  $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$  (limite de águas profundas).

Para pequenas profundidades relativas ( $\frac{d}{L} < 0.05$ ), as órbitas descritas pelas partículas são muito pronunciadas e achatadas (Figura 2.12). No caso limite em que  $d/L$  tende para o valor zero, entra-se no âmbito de uma outra aproximação proposta por Airy, a teoria linear de ondas longas de oscilação.

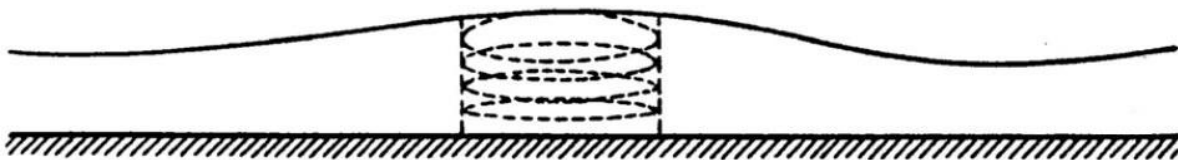


Figura 2.12 - Órbitas das partículas para profundidades relativas muito pequenas (Veloso Gomes 2002)

#### 2.4.7. CELERIDADE DE GRUPO

O mar transporta grandes quantidades de energia através das ondas que se propagam e é importante ter em conta o quão rápido esta energia se move. Para isso é necessário determinar a celeridade de grupo,

i.e. a velocidade dos grupos de ondas que transportam essa energia no espaço e no tempo. Esta celeridade não é idêntica à de uma onda considerada na sua individualidade. A celeridade de grupo corresponde à velocidade de propagação da onda envolvente de um grupo de ondas sinusoidais de banda estreita, i.e. a interação entre duas ou mais ondas sinusoidais que se propagam na mesma direção mas com comprimentos de onda e períodos ligeiramente diferentes. Para o caso de um grupo constituído por duas ondas sinusoidais, a elevação da superfície livre é dada por:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a \cos\left(\frac{2\pi x}{L_1} - \frac{2\pi t}{T_1}\right) + a \cos\left(\frac{2\pi x}{L_2} - \frac{2\pi t}{T_2}\right) \quad (2.54)$$

em que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são as elevações dessas duas ondas. Assumindo a teoria linear, a soma por sobreposição de soluções é possível. Considerando duas alturas de onda  $H$  idênticas, por simplificação, e dois comprimentos de onda  $L_1$  e  $L_2$  ligeiramente diferentes para uma certa posição num determinado instante,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  estarão em fase e a onda observada terá o dobro da altura das duas primeiras,  $2H$ . Para uma outra posição num instante de tempo diferente, as ondas estarão em oposição de fase e a onda resultante terá altura nula. A Figura 2.13 representa um grupo de ondas por sobreposição de duas sinusoides de diferentes períodos.

É efetivamente a onda envolvente, criadora do perfil da soma das ondas sinusoidais, a condutora do grupo de ondas e a sua elevação da superfície livre é dada por

$$\eta_{envolvente} = \pm H \cos\left[\pi\left(\frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2}\right)x - \pi\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}\right)t\right]. \quad (2.55)$$

É a velocidade a que esta envolvente se propaga que representa a velocidade do grupo. À medida que estas ondas vão aumentando, ou seja, à medida que  $L_1$  se aproxima de  $L_2$  e consequentemente  $T_1$  de  $T_2$ , a velocidade para que tende é a celeridade de grupo e é, no limite, dada por:

$$C_g = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] C, \quad (2.56)$$

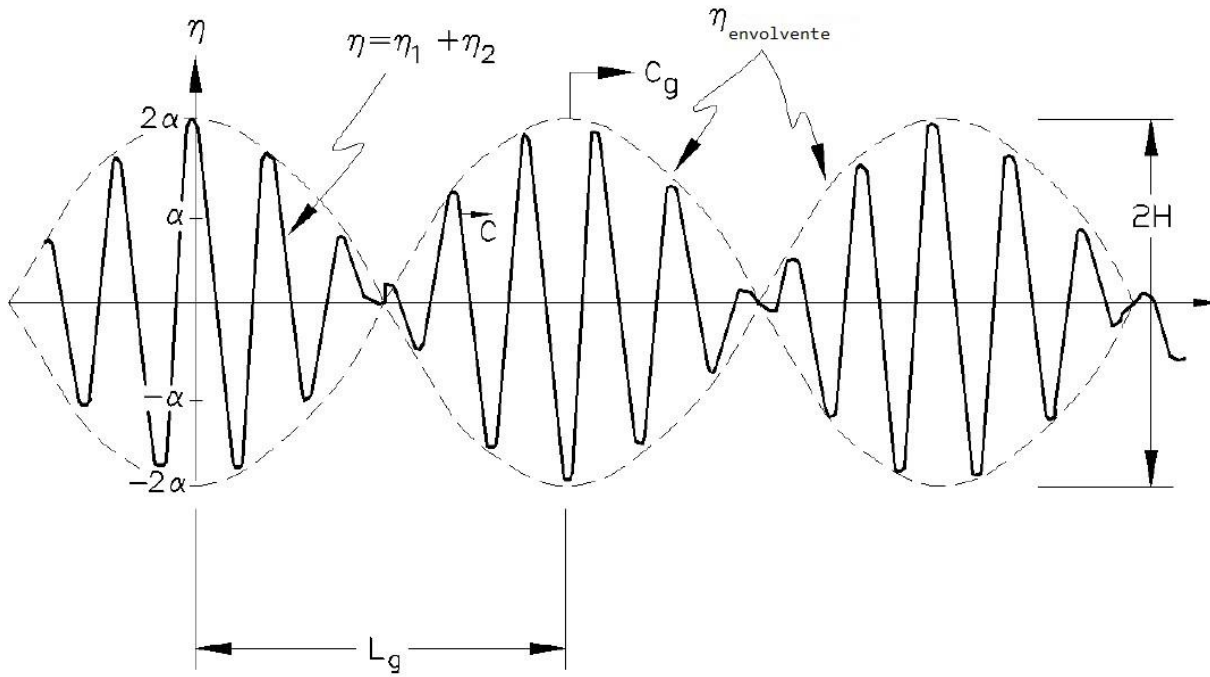


Figura 2.13 – Grupo de ondas formado pela sobreposição de duas sinusóides de períodos diferentes (USACE 2002)

ou, na forma adimensional, por

$$\frac{C_g}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}}. \quad (2.57)$$

Graficamente, a celeridade de grupo na forma adimensional encontra-se representada na Figura 2.14. Em águas pouco profundas, em que  $\frac{d}{L} < 0.05$ , os termos  $\sinh(2kh)$  e  $\tanh kh$  tendem para os respectivos argumentos o que significa que o braço direito da equação (2.57) tende para a unidade pelo que a celeridade de grupo tende para o valor da celeridade de fase, i.e.

$$C_g = C. \quad (2.58)$$

Para águas profundas, em que  $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$ , a celeridade de grupo é metade da velocidade de fase e então

$$C_g = \frac{1}{2} C \quad (2.59)$$

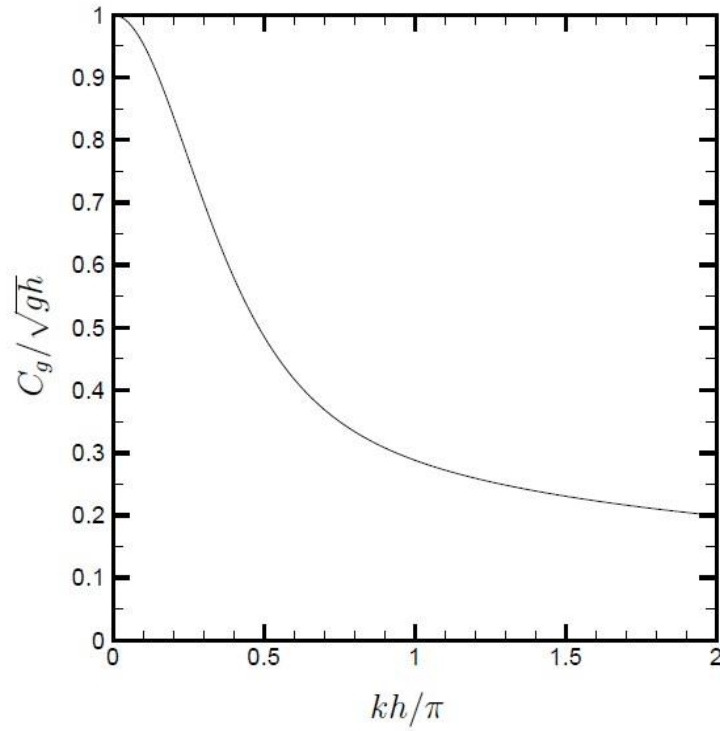


Figura 2.14 – Celeridade de grupo linear de Airy (Avilez-Valente 2001)

#### 2.4.8. EMPOLAMENTO

Considere-se a propagação de ondas na direção do eixo OX sobre um fundo de inclinação suave. Dingemans prova que o fluxo de energia destas ondas é conservado e é equivalente a

$$\nabla \cdot (C_g a^2) = 0 \quad (2.60)$$

onde  $a$  corresponde à amplitude de onda. A introdução do conceito de coeficiente de empolamento linear,  $\alpha_s$ , surge como sendo o simétrico da razão entre a variação relativa da amplitude de onda e a variação relativa da profundidade. Assim sendo, temos

$$\frac{a_x}{a} = -\alpha_s \frac{h_x}{h} \quad (2.61)$$

onde  $\alpha_s$  é o coeficiente de empolamento linear, e  $x$  corresponde à derivada parcial em ordem ao espaço posicional. Então, desenvolvendo a expressão anterior vem (Avilez-Valente 2001)

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(C_g)_x}{C_g} \quad (2.62)$$

Tendo em conta a definição da celeridade de fase  $C$  conclui-se que

$$\frac{C_x}{C} = -\frac{k_x}{k}. \quad (2.63)$$

Definindo a função

$$G = \frac{2kh}{\sinh 2kh}, \quad (2.64)$$

resulta então

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \left( \frac{k_x}{k} - \frac{G_x}{1+G} \right), \quad (2.65)$$

em que

$$G_x = -(1 - G \cosh 2kh) \frac{k_x}{k}. \quad (2.66)$$

O coeficiente de variação relativa do número de onda com a profundidade é definido como

$$\frac{k_x}{k} = -\alpha_k \frac{h_x}{h}. \quad (2.67)$$

Atendendo à condição de dispersão (2.33) temos então que

$$\alpha_k = \frac{G}{1+G}. \quad (2.68)$$

Após algum manuseamento algébrico, o coeficiente de empolamento linear  $\alpha_s$  resulta ser

$$\alpha_s = \frac{G}{(1+G)^2} \left[ 1 + \frac{G}{2} (1 - \cosh 2kh) \right], \quad (2.69)$$

sendo representado graficamente na Figura 2.15.



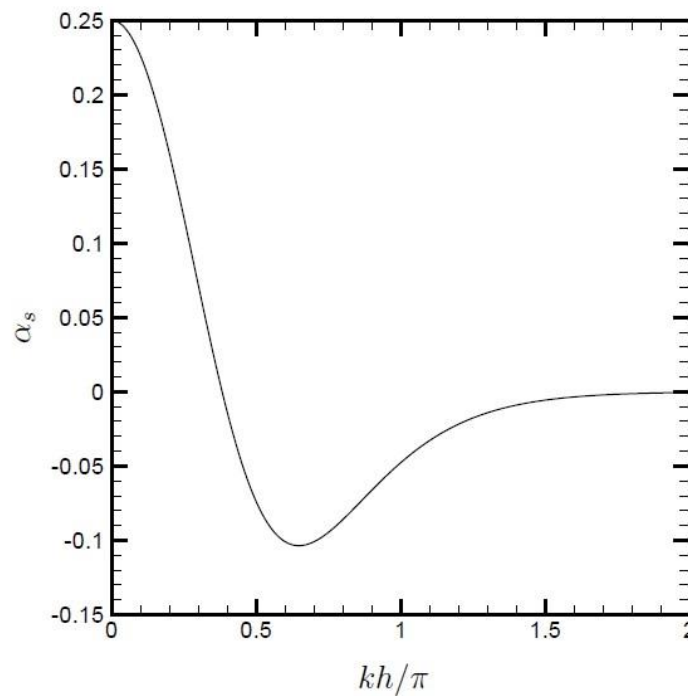


Figura 2.15 – Coeficiente de empolamento linear  $\alpha_s$  (Avilez-Valente 2001)

## 2.5. RESSONÂNCIA

Do ponto de vista físico teórico, a ressonância em bacias portuárias é semelhante a outros tipos de ressonância causada por oscilações livres ou forçadas por sistemas mecânicos, acústicos ou por outro fluido. Qualquer sistema físico que seja capaz de vibrar possui características intrínsecas de vibração natural, as frequências naturais de vibração, que dependem principalmente da geometria e configuração do sistema. Ao ser excitado na sua frequência natural, um sistema reage ao vibrar com amplitudes cada vez maiores (Figura 2.16). Alguns sistemas respondem a uma excitação devolvendo uma força de restauro que reestabelece o seu equilíbrio. Bons exemplos disso são um oscilador de um grau de liberdade ou uma corda de guitarra.

Se o sistema for excitado cíclica e continuamente a uma frequência que não a sua natural verificam-se oscilações forçadas. Caso as oscilações forçadas sejam à frequência natural do sistema ou perto desta, acontece geralmente uma resposta amplificada. A proximidade à frequência natural e as condições de atrito no sistema é que vão ditar a magnitude dessa resposta.

Se a excitação inicial for pontual, ou seja, se não for continuada, o oscilador ou a corda irão vibrar livremente na sua frequência natural até que a sua amplitude diminua exponencialmente devido ao atrito no sistema e lhe sejam devolvidas as condições de equilíbrio em repouso. Na ausência de atrito, ambos vibrariam infinitamente no tempo num movimento harmónico.

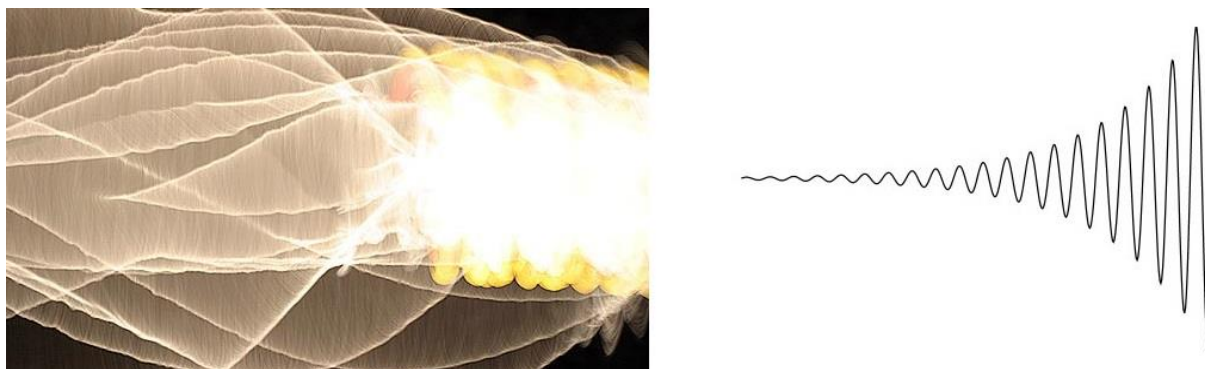


Figura 2.16 - Vibração da corda de uma guitarra (fotografia por Andrew Davidhazy) e representação gráfica da ressonância

### 2.5.1. PERÍODOS PRÓPRIOS E MODOS DE OSCILAÇÃO DE UMA BACIA PORTUÁRIA

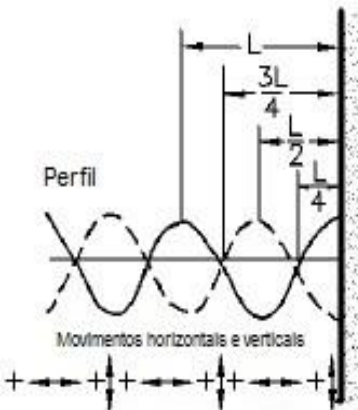
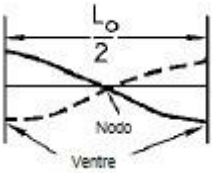
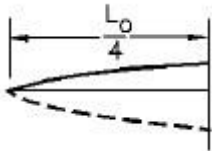
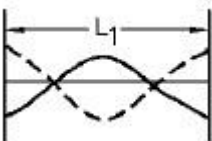
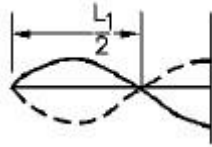
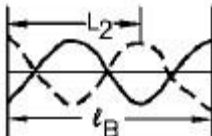
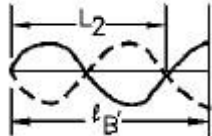
Normalmente, os sistemas possuem mais do que uma frequência de vibração natural oscilando de modos diferentes. No caso de uma bacia portuária, as diferentes configurações da onda estacionária que oscila no interior desta denominam-se de modos de oscilação ou modos de vibração. Os períodos de onda associados a estes modos de oscilação designam-se de períodos próprios e, quer em planta quer em profundidade, dependem principalmente da geometria da bacia portuária.

Considere-se o caso de duas bacias regulares simples, uma semiaberta e outra fechada, retangulares, simétricas, estreitas e de comprimento  $l_B$  com fundo uniforme. A Tabela 2.3 ilustra os três primeiros modos de oscilação em ambas as bacias. É importante referir que os modos apresentados são modos idealizados em condições de reflexão total nas fronteiras sólidas.

O modo fundamental corresponde ao modo de oscilação com maior período de onda. Os modos superiores correspondem às harmónicas. No modo fundamental de uma bacia fechada encontram-se exemplificados um nodo e um ventre, que correspondem, respetivamente, a zonas nodais de amplitude nula e velocidade máxima e a zonas ventrais de amplitudes máximas e velocidades nulas.

O modo de Helmholtz, referido na secção 2.1, não se encontra representado na Tabela 2.3 por não corresponder a uma onda estacionária. Numa eventual representação, este modo estaria ausente numa bacia fechada e, numa bacia semiaberta, apresentava um período muito maior que o período do modo fundamental fazendo oscilar toda a bacia ascendente e descendente em uníssono.

Tabela 2.3 - Configuração dos três primeiros modos de oscilação de uma bacia fechada e semiaberta.  $L$  – comprimento de onda (USACE 2002)

Onda Estacionária	Bacia Fechada	Bacia Semiaberta
	Modo Fundamental (Primeira Harmónica)	Modo Fundamental (Primeira Harmónica)
		
	Segundo Modo (Segunda Harmónica)	Segundo Modo (Terceira Harmónica)
		
	Terceiro Modo (Terceira Harmónica)	Terceiro Modo (Quinta Harmónica)
		

Quando o período da onda incidente coincide com um período próprio da bacia portuária, a amplitude da oscilação tenderá a amplificar-se podendo então originar o fenómeno de ressonância. A resposta da bacia a esta amplificação representa-se através de uma curva que relaciona o coeficiente de amplificação (relação entre a amplitude de onda oscilante excitada no interior do porto e a amplitude de onda incidente que provoca a excitação) e o período de onda. Graficamente, esta curva apresenta vários picos máximos do coeficiente de amplificação correspondendo, cada um deles, um período ressonante de um determinado modo de oscilação. A determinação das curvas de resposta das bacias é feita recorrendo a modelos físicos, a modelos matemáticos analíticos ou a modelos numéricos.

### 2.5.2. BACIAS DE GEOMETRIA SIMPLES

Miles e Munk (1961), num trabalho pioneiro, estudaram o problema de ressonância associado a uma bacia retangular aberta de geometria arbitrária com comprimento  $l_B$  e diferentes valores para a largura de entrada  $l_w$  sendo a largura de entrada muito menor do que o comprimento da onda incidente. Verificaram que quanto mais estreita fosse a largura de entrada, maior seria a amplificação da oscilação no interior do porto. Ou seja, a construção de quebramares, ou outras estruturas de proteção do porto que contraíam a abertura de entrada levariam ao aumento da amplitude das oscilações no seu interior. Estes autores denominaram este fenómeno de “paradoxo dos portos” (*harbor paradox*).

Miles e Munk acreditavam que o seu conceito era válido para qualquer porto desde que, no espectro de resposta, o pico ressonante fosse nítido e bem definido. Outros autores estudaram este efeito (Le Méhaut e Wilson 1962; Raichlen 1966; Miles 1974) e verificaram que o *harbor paradox* só tem importância relevante para o modo de Helmholtz. De facto, o paradoxo teórico de Miles e Munk não

tinha em consideração os efeitos de atenuação e de dissipação de energia na entrada e no interior do porto causados pela radiação das ondas, por atrito e por efeitos não-lineares presentes em modos superiores ao de Helmholtz. No entanto, o modo de Helmholtz é o modo mais importante em bacias naturais e em portos com estreita largura de entrada e altos coeficientes de amplificação pelo que podem ocorrer problemas graves nos navios atracados ou nas operações a decorrer no porto

A resposta ressonante de uma bacia retangular aberta foi apresentada por Ippen e Goda (1963) relacionando o coeficiente de amplificação com o comprimento relativo do porto ( $kl$ ) sendo  $k$  o número de onda e  $l$  o comprimento do porto.

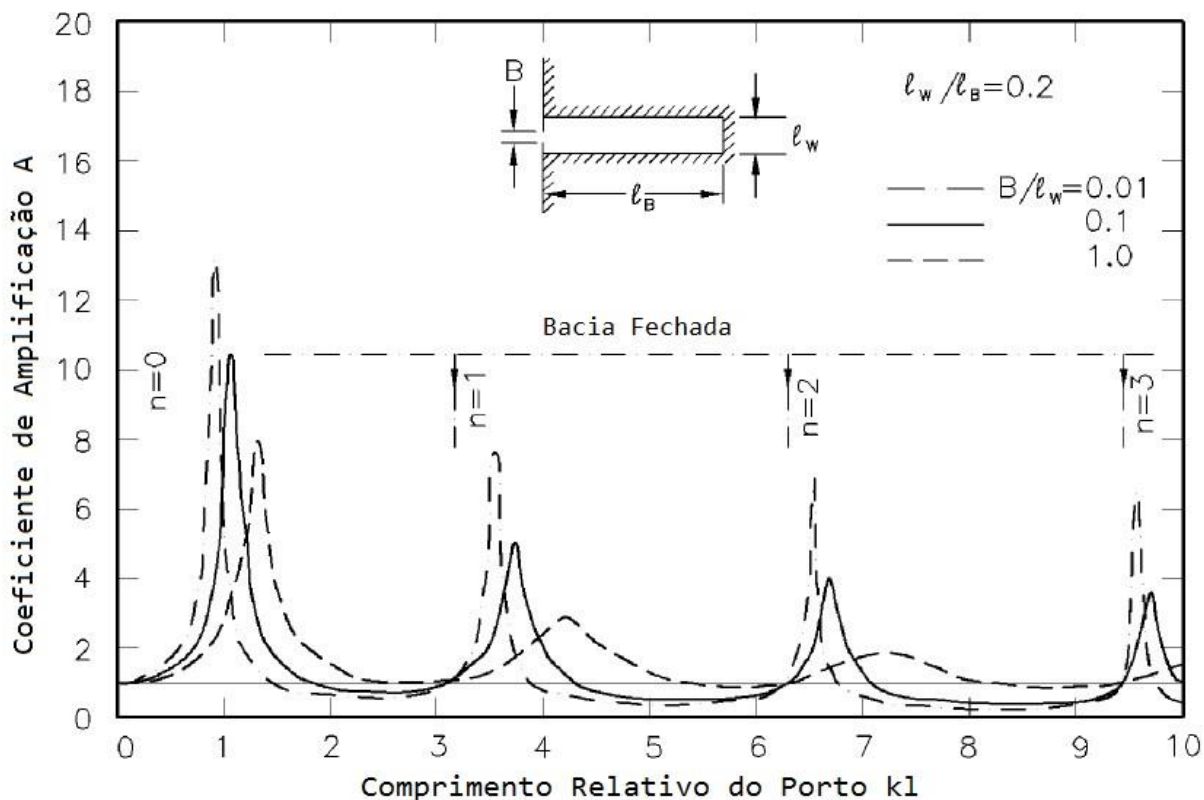


Figura 2.17 - Solução teórica para a curva de resposta de uma bacia retangular, estreita, simétrica (Raichlen 1968; Ippen e Goda 1963)

A curva de resposta obtida por Ippen e Goda (1963) está ilustrada na Figura 2.17 apresentando três curvas para configurações da abertura do porto: uma totalmente aberta e duas com diferente grau de fecho. A geometria da bacia e os valores do coeficiente de amplificação para vários modos de oscilação estão também representados. Consegue-se verificar uma diminuição do valor de  $kl$  correspondentes aos picos ressonantes com o decréscimo da abertura relativa da bacia. Os coeficientes de amplificação apresentados são valores por excesso em relação aos valores para portos reais dado que a curva de resposta é determinada sem a consideração da viscosidade ou do atrito no fundo e, portanto, sem os efeitos dissipativos resultantes destes.

Outros autores estudaram a resposta ressonante para bacias de geometrias simples diferentes. Raichlen e Lee (1992) reviram bacias de forma circular investigadas primeiramente por Lee (1962). Estudaram também a ressonância em bacias com fundos de profundidade constante com bacias interligadas dividindo o domínio em várias regiões. Verificaram que a solução final seria compatibilizada entre as soluções de cada região nas fronteiras comuns de diferentes regiões e na entrada do porto. Para bacias

simples interligadas, em certos casos, a resposta do domínio completo é a sobreposição das respostas individuais de cada bacia. Recomenda-se portanto cautela na construção de bacias interiores em portos já existentes, para evitar um eventual agravamento das condições ressonantes.

Para bacias de geometria arbitrária, Zelt (1986) e Zelt e Raichlen (1990) desenvolveram uma teoria para a previsão da resposta destas bacias com fundos inclinados. Estes dois autores quantificaram a resposta dos portos de duas maneiras diferentes. Primeiramente calcularam o fator de amplificação  $R$  usualmente definido como metade do rácio entre a amplitude de onda no ponto mais interior de uma bacia de geometria regular e a amplitude da onda incidente. Metade do rácio devido ao facto de a incidência perpendicular de uma onda numa parede vertical resultar (em condições de reflexão total) numa onda com o dobro da amplitude (onda estacionária). A inclusão deste fator, apesar de importante, pode ser ilusório por incorporar dois efeitos diferentes. O empolamento e amplificação geométrica das ondas (devido à variável batimetria dos fundos e à geometria das paredes das estruturas portuárias) e o aprisionamento de energia no interior do porto (devido às estruturas de impedimento de penetração das ondas à entrada dos portos) influenciam a amplitude de onda no interior do porto. Zelt e Raichlen (1990) definiram então um fator de amplificação alternativo,  $R'$ , que quantifica unicamente a energia gerada pela ligação da entrada do porto com o oceano. Para isso recorrem a um fator  $S$ , para o mesmo porto mas agora ligado a um canal infinito de profundidade constante ao invés da ligação ao oceano, que quantifica o empolamento e a amplificação geométrica devido à batimetria variável dos fundos e à geometria das paredes laterais dentro do porto. O fator de amplificação alternativo  $R'$  pode então ser definido como o quociente entre o fator de amplificação tradicional  $R$  (incluindo ambos os processos de amplificação das ondas) e o fator  $S$  que incluiu somente o efeito do empolamento e amplificação geométrica:

$$R' = \frac{R}{S} \quad (2.70)$$

Os fatores  $R$  e  $R'$  são ambos obtidos normalizando uma amplitude num ponto interior extremo do porto em certas quantidades. Para  $R$ , esta quantidade é a amplitude medida à entrada do porto se a entrada for fechada aquando da entrada da onda incidente sendo esta refletida por uma parede vertical plana (onda estacionária). Para  $R'$ , a quantidade refere-se à amplitude medida à costa do porto se este estiver ligado a um canal infinito de profundidade constante. No caso de uma bacia retangular de profundidade constante, os fatores  $R'$  e  $R$  igualam-se, mas, em geral, para outros tipos será diferente.

Para bacias arbitrárias de geometria regular, com uma relação entre a largura e o comprimento do porto igual a 0.2 ( $l_w/l_B = 0.2$  com a simbologia apresentada na Figura 2.17) e fundos constantes e varáveis, Zelt (1986) obteve as curvas de resposta representadas na Figura 2.18.

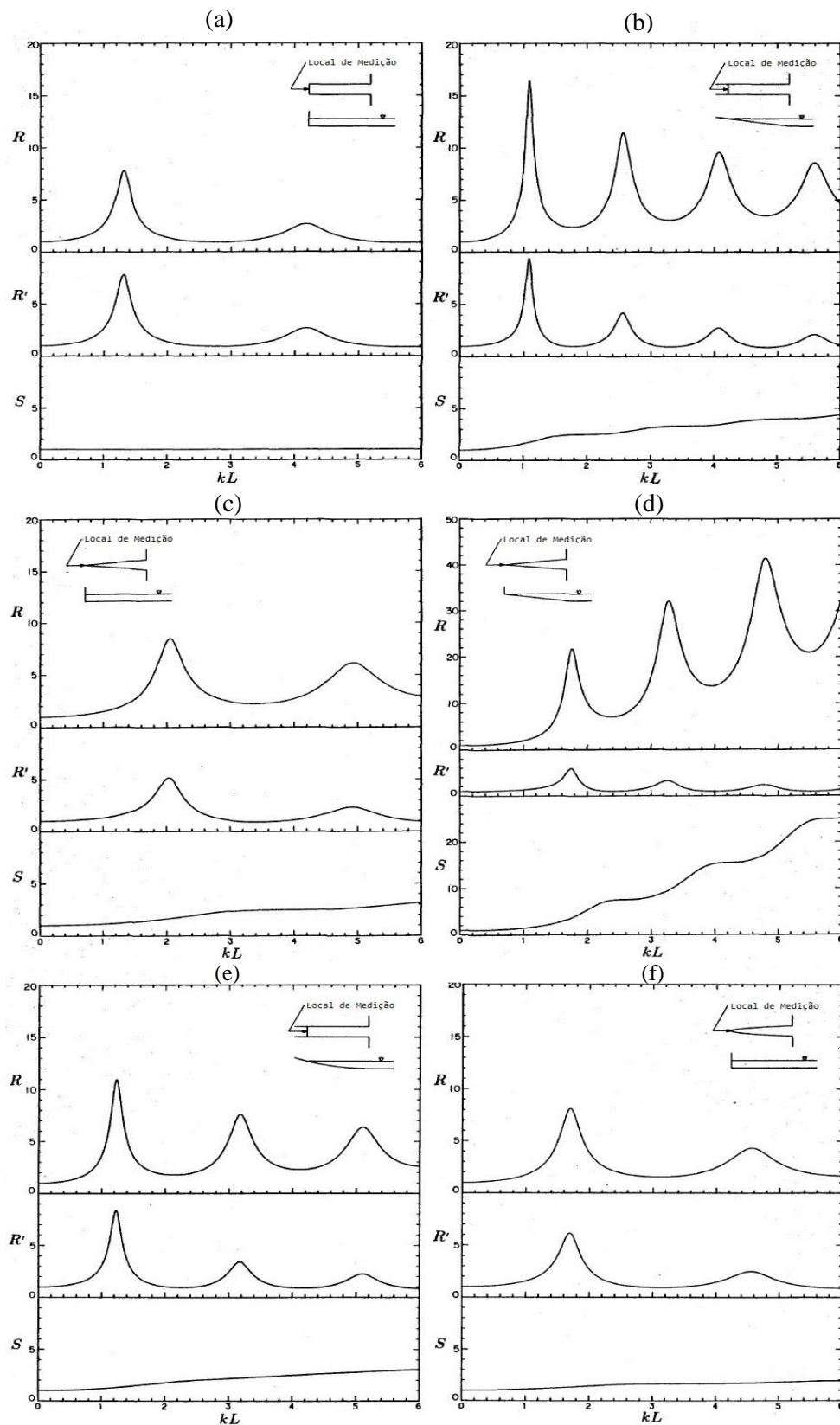


Figura 2.18 - Curva de Resposta de Portos. (a) retangular a profundidade constante, (b) retangular a fundo de declive linear, (c) lados linearmente convergentes a profundidade constante, (d) lados linearmente convergentes a fundo de declive linear, (e) retangular a fundo parabólico, (f) lados parabólicos convergentes a fundo plano (Zelt 1986)

A Figura 2.18 (a) mostra a resposta de uma bacia retangular a fundos constantes. Verifica-se que  $S = 1$ , o que quer dizer que, dada a uniformidade dos fundos e regularidade das paredes da bacia, não existe amplificação na parede terminal do porto. Como consequência, os fatores  $R$  e  $R'$  têm valores idênticos. A Figura 2.18 (b) apresenta, para a mesma geometria de porto, o efeito de um fundo de declive constante. Nota-se agora um crescimento do fator  $S$  com  $kL$  que se deve ao facto de, para um declive constante, o empolamento ser maior em ondas com curto comprimento de onda do que em ondas com comprimento de onda longo. Devido ao empolamento, a resposta total  $R$  será muito maior no caso de um declive constante do que no caso representado na Figura 2.18 (a). Quanto aos fatores  $R'$ , quantitativamente para os dois primeiros casos, têm uma magnitude comparável.

As curvas de resposta para bacias cujos lados converjam linearmente num vértice estão representadas na Figura 2.18 (c) e (d). A primeira impressão que se tira é o crescimento acentuado do fator  $S$  em (d) desde a entrada da bacia até ao ponto de convergência dos lados. Este crescimento é devido ao empolamento e à amplificação geométrica. Consequentemente, o fator total  $R$  é substancialmente grande crescendo rapidamente com o aumento de  $kL$  e apresenta uma natureza aproximadamente ressonante. No entanto, o fator alternativo  $R'$  comporta-se de maneira parecida a (c) e aos casos anteriores.

O último par de figuras (Figura 2.18 (e) e (f)) analisa, respetivamente, uma bacia retangular a fundo parabólico e uma bacia de lados parabólicos convergentes a fundo de profundidade constante. Verifica-se que o efeito do empolamento devido à redução da profundidade é maior do que o efeito da amplificação geométrica devida à redução parabólica da largura da bacia e, por isso, o valor do parâmetro  $S$  é maior para uma bacia de fundo parabólico. O fator total  $R$ , como resultado, é maior para um porto de fundo parabólico do que para um porto de lados parabólicos convergentes.

A Tabela 2.4 resume quantitativamente as conclusões da análise feita por Zelt (1986), presente na Figura 2.18, para os dois primeiros modos de ressonância. A primeira coluna ilustra em planta e em corte transversal as diferentes geometrias de bacias. A lista de valores na coluna  $k_{res}$  corresponde aos valores de  $k$  em ressonância e correspondem a valores que maximizam o valor de  $R$ . As colunas  $R_{res}$ ,  $R'_{res}$  e  $S_{res}$  listam os valores de  $R$ ,  $R'$  e  $S$  correspondentes aos valores de  $k_{res}$ . Note-se que todos os valores apresentados correspondem a bacias com o mesmo comprimento e largura.



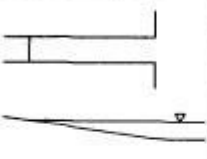
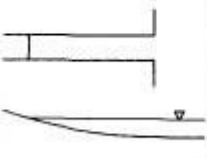
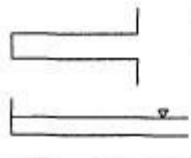
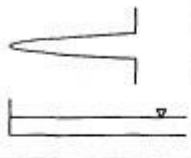
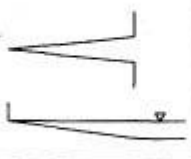
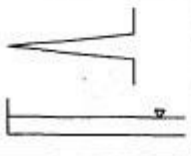
Geometria	Primeiro Modo				Segundo Modo			
	$\kappa_{res}$	$R_{res}$	$R'_{res}$	$S_{res}$	$\kappa_{res}$	$R_{res}$	$R'_{res}$	$S_{res}$
	1.089	16.43	9.40	1.75	2.565	11.45	4.18	2.74
	1.229	10.96	8.36	1.31	3.177	7.61	3.43	2.22
	1.315	7.81	7.81	1.00	4.182	2.68	2.68	1.00
	1.696	8.12	6.14	1.32	4.559	4.32	2.49	1.73
	1.757	21.85	5.91	3.70	3.280	32.18	3.33	9.67
	2.050	8.50	5.14	1.65	4.926	6.19	2.33	2.65

Tabela 2.4 - Primeiro e segundo modo de ressonância para seis bacias de diferentes geometrias (Zelt 1986)

### 2.5.3. BACIAS DE GEOMETRIA COMPLEXA – PORTOS REAIS

A análise teórica para bacias simples de configurações regulares não corresponde a situações reais. De facto, portos reais nunca coincidem completamente com formas simples, pelo contrário, diferem drasticamente. Nestes casos recorre-se normalmente a uma análise por modelos físicos ou por modelos numéricos para obtenção da curva de resposta respetiva. A combinação de ambos os modelos é usualmente utilizada para a investigação de uma gama completa das condições ondulatórias num determinado porto. De uma maneira geral, os modelos físicos representam com maior precisão o comportamento das oscilações num porto provocadas por ondas de curto período (USACE, 2002). Apesar de a representação à escala do domínio ser apropriada, existem limitações num modelo físico no que toca aos custos de construção, à simulação dos efeitos de dissipação por atrito e dificuldades



inerentes ao controlo das ondas longas numa bacia fechada. A simulação na geração de ondas longas requer especial cuidado para que não se criem condições indesejáveis de reflexão nas fronteiras do modelo físico.

No campo de ondas longas e muito longas, os modelos numéricos são bastantes mais úteis tanto a nível de investigação, estudos iniciais, análises comparativas e mesmo a reavaliação de portos por pesquisa de informação anterior tanto de campo como de modelos físicos. Lillycrop et al. (1993) defendiam a utilização de modelos numéricos, em detrimento dos modelos físicos, para períodos de onda superiores a 400 segundos. Não obstante, ambos os modelos são eficazes no tratamento de oscilações de curto período. As curvas de resposta de portos podem ser geradas pelos modelos numéricos e resultados sob condições de ressonância em zonas de especial interesse podem ser representados ao longo de todo o domínio através de padrões de oscilação. Um bom modelo numérico é aquele que conduz a uma melhor aproximação de uma realidade de resultados embora possam existir limitações no âmbito das condições da onda incidente, na evolução da propagação da onda sobre uma batimetria irregular, na interação onda/estrutura e nas condições de fronteira no domínio considerado.

Chen e Mei (1974) conceberam um modelo com solução numérica pelo método dos elementos finitos híbridos baseado numa formulação variacional com a minimização de um funcional calculando as oscilações ressonantes em bacias portuárias de várias configurações. Estudaram ainda as oscilações ressonantes e esforços desenvolvidos num porto real.

Chen (1986), Chen e Houston (1987) e Cialone (1991) aplicaram um modelo estacionário de elementos híbridos baseado na *mild slope equation* com consideração de atrito de fundo e várias condições de reflexão na fronteira. A fronteira em mar aberto é considerada um semicírculo exterior à entrada do porto por onde incidem ondas monocromáticas. O modelo é linear e não considera a dissipação de energia à entrada do porto.



## 3

## MODELO MATEMÁTICO

## 3.1. INTRODUÇÃO

A propagação das ondas desde o largo até atingirem a costa é um processo complexo combinando os fenómenos de reflexão, refração, difração e outros mecanismos de transformação e deformação das ondas que, ao ocorrerem ou penetrarem dentro de portos ou bacias portuárias, podem gerar perturbações e oscilações que levem à ressonância. É por isso essencial, em engenharia costeira e portuária, uma precisa e fiável simulação da propagação das ondas. A *mild slope equation*, estabelecida pela primeira vez por Berkhoff (1972), introduz uma solução para a propagação de ondas sobre um fundo de inclinação suaves considerando os efeitos combinados dos fenómenos da difração e refração das ondas e, até aos dias de hoje, continua a ser um dos modelos matemáticos mais eficazes na avaliação dos efeitos de onda combinados. Junto à costa, em águas de pequena profundidade, fenómenos de dissipação de energia como a rebentação das ondas, dissipação nas fronteiras e, no caso das ondas longas, o atrito de fundo, são importantes em problemas de oscilação o que induziu à inclusão de um termo dissipativo na equação de Berkhoff. Existe uma vasta literatura no que toca ao desenvolvimento da *mild slope equation* de maneira a ampliar o campo de aplicação pela inclusão do termo dissipativo que leva o atrito de fundo e a rebentação das ondas em consideração. Exemplos disso são Battjes e Janssen (1978), Dally *et al.* (1985), Chen (1986) e Kostense *et al.* (1986). É importante referir que os efeitos dissipativos só são adequadamente tratados se as características elípticas do modelo se mantiverem visto que não podem ser desprezadas as reflexões que surgem no interior do domínio. Em aproximações parabólicas da *mild slope equation* para o modelo de propagação, o mesmo já não acontece. Derivações analíticas para condições de rebentação e não rebentação de ondas que propaguem sobre um fundo arbitrário finito poroso foram feitas por Rojanakamthorn *et al.* (1989), Losada *et al.* (1996a), Losada *et al.* (1996b) e Silva *et al.* (2002). Derivações para a extensão da equação à influência de correntes foram apresentadas por Kirby (1984) e Kostense *et al.* (1988). No presente trabalho, o modelo utilizado resolve a equação elíptica de Berkhoff sem a inclusão de efeitos dissipativos pelo facto de que, como o atrito de fundo é função do quadrado da velocidade, seria necessário conhecer a altura de onda, que é desconhecida em primeira instância.

Os modelos numéricos são ferramentas poderosas na previsão das características de ondas desde o largo até ao interior dos portos e, por isso, no âmbito de modelos elípticos, muitos autores têm utilizado o método dos elementos finitos (MEF) (Bettess e Zienkiewicz, 1977; Hurdle *et al.*, 1989) ou o método das diferenças finitas (Panchang *et al.* 1991). No entanto, poderão existir limitações no estabelecimento de um domínio finito no que toca à imposição de condições fronteira. Por esta razão, é muito importante, para um modelo numérico eficaz, o tratamento da fronteira. Num problema típico de ressonância em bacias portuárias, são normalmente definidos dois tipos de condição fronteira: fronteiras abertas, que permitem a entrada e radiação de ondas; e fronteiras fixas, que são obstáculos totalmente ou parcialmente refletores de ondas. O caso das fronteiras abertas tem de ser definido de forma aproximada

porque, teoricamente, as ondas radiadas para o exterior propagam-se para o infinito devendo satisfazer a condição de Sommerfeld. É praticamente impossível, do ponto de vista computacional, considerar um domínio infinito ou suficientemente grande que satisfaça totalmente esta condição e, por isso, a solução passa por estabelecer um domínio finito limitado por fronteiras abertas artificiais em que nelas sejam impostas uma aproximação da condição de Sommerfeld. No caso das fronteiras fixas, Berkhoff (1972) assumiu que o tratamento deste tipo de fronteiras no modelo elíptico da *mild slope equation* contém dois parâmetros: um coeficiente de reflexão e uma diferença da fase. O coeficiente de reflexão é definido como o quociente entre a amplitude da onda refletida e a amplitude da onda incidente. Aqui serão tratadas apenas fronteiras fixas com coeficiente de reflexão unitário pela simples razão de, no contexto de ondas longas, as ondas apresentarem uma declividade muito baixa fazendo com que, ao incidirem sobre o obstáculo, reflitam praticamente a totalidade da sua energia. A diferença de fase ocorre entre as ondas que se aproximam da fronteira e as ondas refletidas por esta. Embora tenha pequeno efeito sobre o campo de ondas, a representação gráfica do ângulo de fase pode ser extremamente útil na identificação de zonas nodais de velocidade máxima. Outro fator que afeta o tratamento de fronteiras é a direção de propagação das ondas relativamente à costa. Behrendt (1985) demonstrou que, quanto maior for o ângulo de incidência das ondas, maior será o efeito de reflexões indesejadas no interior do porto. Como a direção é desconhecida *a priori*, neste trabalho será assumido como zero o valor do ângulo de incidência para efeitos de cálculo numérico.

Na construção de um modelo numérico baseado em elementos finitos, o primeiro passo é a criação de uma malha apropriada. Num dado problema, o número de elementos presentes na malha afeta diretamente a capacidade do modelo e o tempo de cálculo. Em estudos de propagação e de ressonância é habitual e vantajosa a utilização de várias resoluções de malha devido a serem domínios de cálculo de grande extensão. Malhas progressivamente mais refinadas à medida que se aproximam da zona de interesse significam uma economia computacional traduzindo uma precisão em função das exigências do utilizador. Normalmente são utilizados elementos triangulares ou quadrangulares e a abertura da malha pode ser definida em função do comprimento de onda que, por sua vez, é relacionado com a profundidade e o período de onda. Um número de pontos igual a 10 por cada comprimento de onda medido já garante uma boa precisão da solução numérica. O modelo presente neste trabalho é resolvido com recurso à *PDE (Partial Differential Equation) ToolBox* incluída no programa de análise numérica MATLAB®, testado para domínios simples e, posteriormente, para domínios complexos em portos reais sendo verificado e validado por comparação com modelos numéricos semelhantes já existentes e, no caso de portos reais, comparado com os resultados dos estudos de ressonância realizados por Fortes (1993). Finalmente, a eficiência do modelo é testada para a bacia portuária do porto de Leixões.

### 3.2. A EQUAÇÃO DE BERKHOFF

O modelo usa a já bem conhecida *mild slope equation* proposta por Berkhoff (1972) que traduz a propagação de ondas harmónicas monocromáticas com pequena amplitude sobre zonas de fundos com inclinação suave incluindo os efeitos combinados da refração e difração. Das várias formas de se obter este modelo da equação de Berkhoff, optou-se pela de Smith e Spinks (1975) reproduzida em Avilez-Valente (2001).

A teoria linear de Airy permitiu definir a dependência funcional entre as variáveis cinemáticas  $\eta$  e  $\varphi$  e a coordenada vertical  $z$ , para uma onda progressiva. Admitindo que a mesma dependência se mantém para ondas que se propaguem em qualquer direção no plano OXY, teremos que a função potencial de velocidades se poderá escrever como:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh(kh)} \quad (3.1)$$

sendo  $\varphi_0$  o valor do potencial complexo  $\varphi$  para  $z = 0$ . Derivando duas vezes, obtém-se que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k^2 \varphi_0 \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh(kh)} \quad (3.2)$$

e, substituindo-se (3.1) e (3.2) na equação (2.26), resulta a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi_0 + k^2 \varphi_0 = 0, \quad (3.3)$$

válida para profundidades constantes.

Berkhoff (1972) obtém um modelo mais geral, válido para fundos de inclinação suave, i.e.,  $\|\nabla h\| < 1/3$  (Booij, 1983). Assumindo uma dependência funcional do tipo (3.1), mas em que  $k = k(x, y)$  e  $h = h(x, y)$ , as equações (2.15) a (2.18) para ondas de amplitude infinitesimal, escrevem-se agora, para a condição de campo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.4)$$

com  $-h < z < 0$ , para a condição de fronteira à superfície livre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0, \quad (3.5)$$

com  $z = 0$ , e para a condição de fronteira no fundo fixo de declive arbitrário

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \nabla h \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (3.6)$$

com  $z = -h(x, y)$ .

Definindo uma função  $f$  como sendo

$$f = \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh(kh)}, \quad (3.7)$$

o processo seguido para a obtenção do modelo de Berkhoff consiste em multiplicar a equação de campo (3.4) pela função  $f$  e proceder à sua integração segundo a vertical, i.e.,

$$\int_{-h}^0 f \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \nabla^2 \varphi \right) dz = 0. \quad (3.8)$$

Desta integração, cujos pormenores aqui se omitem, resulta a equação de *mild slope* para ondas harmónicas

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \varphi_0) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \varphi_0 = 0. \quad (3.9)$$

Dando a relação funcional entre a função potencial  $\varphi_0$  e a elevação da superfície livre  $\eta$ , a qual é

$$\varphi_0 = -i \frac{g}{\omega} \eta, \quad (3.10)$$

a equação de Berkhoff para a superfície livre é idêntica a (3.9) apenas por substituição de  $\varphi_0$  por  $\eta$ , i.e.

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0. \quad (3.11)$$

As equações (3.9) e (3.11), em ambas as formas, são conhecidas como a equação de Berkhoff, ou *mild slope equation* na literatura anglo-saxónica. Como já foi dito, esta equação rege a propagação de ondas de amplitude muito pequena e é válida em fundos de declive suave, i.e.,  $\frac{\nabla h}{kh} \ll 1$ . Esta condição aparentemente impede a utilização da equação a zonas de declive mais acentuado. No entanto, nesses casos, a reflexão causada pelo fundo pode ter efeitos significativos deixando, por isso, de ser válida a hipótese da equação de Berkhoff.

### 3.3. CONDIÇÕES FRONTEIRA

Como já foi referido, o tratamento das condições de fronteira é de extrema importância para a eficácia de um modelo numérico e a resolução da *mild slope equation* requer a imposição condições de fronteiras apropriadas. Dentro dos dois tipos de fronteira (abertas e fixas) podem ser impostas condições de radiação, condições de geração-radiação, elevações de superfície livre e condições de reflexão total ou parcial. O caso da imposição da elevação da superfície livre é utilizado em fronteiras onde são conhecidos esses mesmos valores como, por exemplo, fronteiras em que se pretende impor a onda incidente.

#### 3.3.1. CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO

Em fronteiras abertas, a condição de radiação assegura a saída de perturbações geradas no interior do domínio no sentido da propagação para o infinito. Teoricamente, uma onda radiada para o exterior propaga-se para o infinito devendo satisfazer a condição de Sommerfeld (Fortes, 1993):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\omega}{c} \right) \eta = 0 \quad (3.12)$$

onde  $r$  é a coordenada radial de uma fronteira circular exterior. Como é praticamente impossível, do ponto de vista computacional, considerar um domínio infinito ou suficientemente grande que satisfaça totalmente esta condição, a solução passa por estabelecer um domínio finito impondo uma aproximação da condição de Sommerfeld. Nestas circunstâncias, esta condição pode ser substituída pela seguinte aproximação assintótica:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2r} \right) \eta. \quad (3.13)$$

Esta condição é conhecida como a condição de radiação de onda cilíndrica e é normalmente imposta numa fronteira circular suficientemente afastada dos obstáculos. A conservação do fluxo de energia da onda que atravessa fronteira segundo esta aproximação é garantida pelo termo  $\frac{1}{2r}$  e considera-se que a onda que sai do domínio considerado é uma onda cilíndrica. As ondas incidentes de longo período têm um comprimento de onda várias vezes superior à extensão total do domínio. Por essa razão, o termo  $\frac{1}{2r}$  pode ser suprimido considerando-se que a onda que sai do domínio é uma onda plana e, consequentemente, adota-se uma condição de radiação aplicada a uma fronteira circular  $\partial\Omega_r$  do tipo

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = ik\eta, \quad (3.14)$$

designada por condição de radiação de onda plana.

### 3.3.2. CONDIÇÃO DE GERAÇÃO-RADIAÇÃO COMBINADAS

Uma fronteira aberta, além da saída de ondas radiadas ou perturbações geradas no interior, tem de permitir igualmente a entrada da onda incidente. A elevação da superfície livre numa fronteira deste tipo é o resultado da sobreposição de uma onda incidente e de uma onda refletida:

$$\eta = \eta_I + \eta_R \quad (3.15)$$

sendo  $\eta_I$  a elevação da superfície livre para a onda incidente e  $\eta_R$  a elevação da superfície livre para a onda radiada. Sabe-se que uma onda plana que entra no domínio satisfaz a seguinte condição cinemática:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial \mathbf{n}} = -ik \cos \alpha \eta_I \quad (3.16)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor da direção radial dirigido para o exterior e  $\alpha$  é o ângulo que a onda incidente faz com a normal. Para o caso de uma onda plana que saia do domínio, é satisfeita a condição

$$\frac{\partial \eta_R}{\partial \mathbf{n}} = ik \cos \theta \eta_R \quad (3.17)$$

sendo  $\theta$  o ângulo da onda radiada com a normal. Atendendo a (3.15), pode-se representar a soma das duas condições de fluxo na seguinte forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} - ik \cos \theta \eta = -ik (\cos \theta + \cos \alpha) \eta_I. \quad (3.18)$$

### 3.3.3. CONDIÇÃO DE REFLEXÃO

Quebramares, paredões, molhes ou praias são obstáculos à propagação das ondas fazendo com que estas, ao incidirem neles, sejam refletidas podendo provocar alterações tanto na amplitude como na fase de onda. É, portanto, necessário impor uma condição de reflexão podendo ser total ou parcial. Esta condição pode ser descrita como

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = i \alpha_{abs} k \eta \quad (3.19)$$

sendo que  $\alpha_{abs}$  é o coeficiente de absorção que se relaciona diretamente com o coeficiente de reflexão  $K_r$  dado por:

$$K_r = \frac{1 - \alpha_{abs}}{1 + \alpha_{abs}} \quad (3.20)$$

O coeficiente de absorção  $\alpha_{abs}$  compreende valores entre 0 e 1 nos casos em que a fronteira é totalmente refletora ou totalmente absorvedora nos respetivos valores extremos. Para valores intermédios a condição diz-se de reflexão parcial e tem a forma da equação (3.19).

Quando  $\alpha_{abs}$  é nulo, acontece o caso de reflexão total das ondas nas fronteiras:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (3.21)$$

Nas fronteiras em que  $\alpha_{abs}$  é unitário, a condição de reflexão assume a forma da condição de radiação de uma onda plana expressa em (3.14). Podemos daqui concluir que a fronteira circular aberta por onde saem do domínio as ondas radiadas é uma fronteira totalmente absorvedora.



### 3.4. FORMULAÇÃO FRACA

O método dos elementos finitos baseia-se numa discretização numérica de uma formulação integral da equação diferencial que rege o fenómeno físico em estudo. No caso da equação de Berkhoff, e para relaxar as condições de continuidade da solução, estabelecer-se-á uma formulação fraca.

Assuma-se que  $\eta(x, y)$  é a solução da equação diferencial. Multiplique-se a equação (3.11) por uma função teste  $\psi(x, y)$  qualquer e integre-se em  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \psi \left( \nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta \right) d\Omega = 0, \quad \forall \psi. \quad (3.22)$$

Devido à presença das segundas derivadas espaciais no integrando da equação (3.22), a função  $\eta(x, y)$  teria de ter continuidade da primeira derivada espacial. Essa condição pode ser relaxada integrando por partes, por aplicação da fórmula de Green, obtendo-se

$$\int_{\Omega} \left( CC_g \nabla \eta \cdot \nabla \psi - \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta \psi \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} CC_g \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} \psi ds = 0, \quad \forall \psi. \quad (3.23)$$

Nesta formulação fraca a função solução  $\eta(x, y)$  terá de ser contínua mas não há exigência de continuidade das suas derivadas.

As condições fronteira de reflexão, de radiação, de geração ou de geração-radiação, são impostas de forma natural numa formulação fraca.

Sejam  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$ ,  $\partial\Omega_3$ , e  $\partial\Omega_4$  respetivamente as fronteiras de reflexão, radiação (onda cilíndrica) geração, e geração-radiação (onda plana). Nessas condições, a formulação fraca escreve-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} CC_g \nabla \eta \cdot \nabla \psi d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{C_g}{C} \eta \psi d\Omega - i \int_{\partial\Omega_1} k CC_g \alpha_{abs} \eta \psi ds - i \int_{\partial\Omega_2} k CC_g \eta \psi ds \\ & + \frac{1}{2r} \int_{\partial\Omega_2} CC_g \eta \psi ds - i \int_{\partial\Omega_4} k CC_g \eta \psi ds \\ & = -i \int_{\partial\Omega_3} k CC_g \cos \alpha \eta_I \psi ds - i \int_{\partial\Omega_4} k CC_g (1 + \cos \alpha) \eta_I \psi ds, \quad \forall \psi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Repare-se que no caso de reflexão total,  $\alpha_{abs} = 0$ , o integral na fronteira  $\partial\Omega_1$  é nulo.

### 3.5. DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica que consiste na obtenção de uma solução aproximada para uma grande variedade de problemas de engenharia. As ferramentas matemáticas atuais

não são suficientemente capazes de encontrar a solução exata para a maior parte dos problemas práticos reais. Neste âmbito, a ideia básica deste método passa por encontrar a solução de um problema complicado substituindo-o por um mais simples de maneira a encontrar uma solução aproximada. As incógnitas, nestes problemas, satisfazem um conjunto de equações diferenciais num considerado domínio  $\Omega$  verificando condições iniciais (se existirem) e condições de fronteira em  $\partial\Omega$ .

Na região considerada para a solução considera-se que o domínio contínuo  $\Omega$  é construído por muitos subdomínios pequenos, geometricamente simples e interligados designados de elementos finitos. Ao conjunto de elementos finitos dá-se o nome de malha de elementos finitos (Figura 3.1) e é sobre ela que se formula o problema por meio de aproximações convenientes. Estas aproximações permitem, através de funções de forma, interpolar os valores da incógnita nos nós da malha. A satisfação destas condições levam à solução aproximada do problema ao nível do elemento finito e, quando reunidas as aproximações elementares, gera aproximações globais no domínio que, por construção, são contínuas. Este processo de subdivisão do domínio e de aproximação da solução em cada elemento designa-se de discretização. A utilização do método dos elementos finitos permite uma grande flexibilidade na discretização de domínios pelo que é adequado na representação de fronteiras arbitrárias e na admissão de discretizações de resolução variável.

No problema em estudo optou-se por elementos finitos triangulares com funções de aproximação lineares.

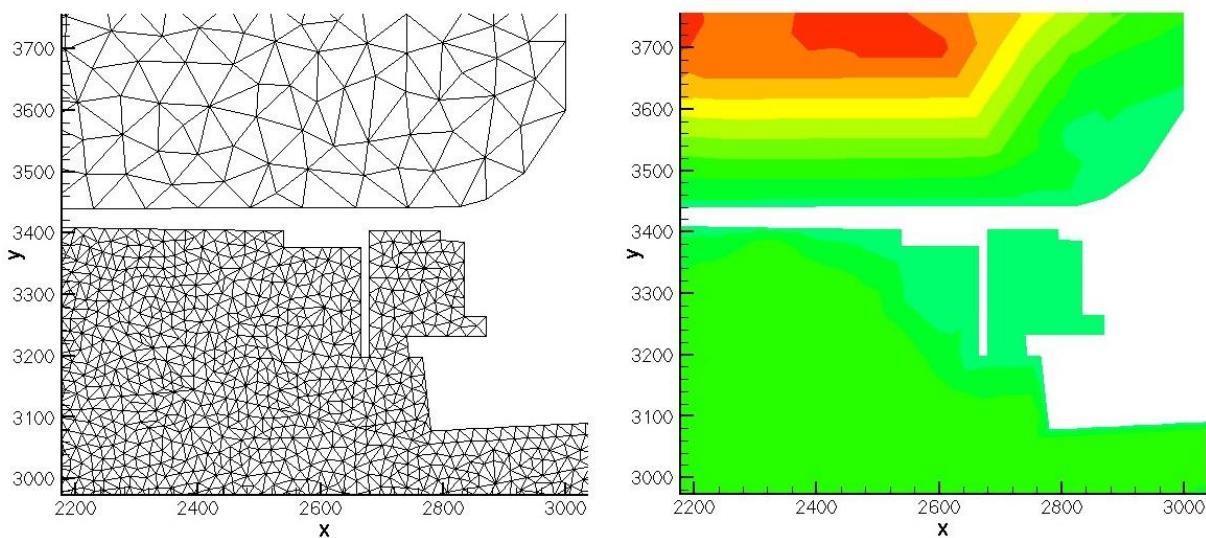


Figura 3.1 - Discretização por elementos finitos

Na discretização por elementos finitos, a solução é aproximada pela função  $\tilde{\eta}(x, y)$  pertencente ao espaço  $\mathcal{V}$  de funções lineares em  $(x, y)$ , definidas por bocados, i.e. sobre cada elemento finitos triangular. (ver por exemplo Zienkiewicz e Morgan, 1983). A função teste  $\tilde{\psi}$  é também definida no mesmo espaço funcional.

A formulação fraca será então, encontrar  $\tilde{\eta}(x, y) \in \mathcal{V}$ , tal que:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\Omega} C C_g \nabla \tilde{\eta} \cdot \nabla \tilde{\psi} d\Omega - i \int_{\partial\Omega_1} k C C_g \alpha_{abs} \tilde{\eta} \tilde{\psi} ds - i \int_{\partial\Omega_2} k C C_g \tilde{\eta} \tilde{\psi} ds + \frac{1}{2r} \int_{\partial\Omega_2} C C_g \tilde{\eta} \tilde{\psi} ds \right. \\
& \quad \left. - i \int_{\partial\Omega_4} k C C_g \cos \theta \tilde{\eta} \tilde{\psi} ds \right) - \omega^2 \left( \int \frac{C_g}{C} \tilde{\eta} \tilde{\psi} d\Omega \right) \\
& = -i \left( \int_{\partial\Omega_3} k C C_g \cos \alpha \tilde{\eta}_I \tilde{\psi} ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{\partial\Omega_4} k C C_g (1 + \cos \alpha) \tilde{\eta}_I \tilde{\psi} ds \right) \quad \forall \psi \in \mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.5.1. OSCILAÇÕES FORÇADAS

A integração numérica da equação (3.25) sobre cada elemento finito e a sua *assemblagem* (ver Fortes 1993 para detalhes) conduz a um sistema de equações algébricas do tipo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f} \tag{3.26}$$

onde a matriz do sistema é construída como

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}, \tag{3.27}$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor das soluções nos nós da malha de elementos finitos e  $\mathbf{f}$  é o vetor solicitação ou perturbação. As matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são conhecidas como a matriz de rigidez e a matriz de massa, respetivamente. A matriz de massa resulta do integral sobre o domínio em  $\tilde{\eta}$ , enquanto que a matriz de rigidez resulta do integral sobre o domínio em  $\nabla \tilde{\eta}$  e dos integrais de fronteira em  $\tilde{\eta}$ . O vetor perturbação resulta do integral de fronteira em  $\tilde{\eta}_I$ .

Dado que pelas relações de dispersão  $k = k(\omega)$ ,  $C = C(\omega)$  e  $C_g = C_g(\omega)$ , as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  e o vetor  $\mathbf{f}$  são também função de  $\omega$ , isto é,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\omega)$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\omega)$  e  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\omega)$ .

### 3.5.2. OSCILAÇÕES LIVRES

No caso de oscilações livres, após o desaparecimento da perturbação inicial, o vetor  $\mathbf{f}$  é identicamente nulo, e o problema (3.25) transforma-se num problema generalizado de valores próprios, na forma

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \tag{3.28}$$

As soluções não triviais do problema (3.28) correspondem aos valores de  $\lambda$  para os quais

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0. \tag{3.29}$$

Na ausência de termos dissipativos, os valores próprios  $\lambda_i = 1, \dots, N$ , em que  $N$  é o número de nós da malha de elementos finitos, são todos reais positivos e as frequências próprias de oscilação do sistema serão dadas por  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . A cada frequência natural  $\omega_i$  está associado um modo de vibração  $\eta_i$ . Dado que  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\omega)$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\omega)$ , o problema de valores próprios é não linear tendo-se recorrido a um processo iterativo para obtenção das soluções.

### 3.6. RESOLUÇÃO NUMÉRICA EM AMBIENTE MATLAB®

#### 3.6.1. GERAÇÃO DAS MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

A construção das malhas de elementos finitos, para todos os domínios considerados, foi feita com recurso ao programa Triangle - A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator (Shewchuk 1996) usando elementos triangulares. O processo de geração da malha conduz a uma numeração praticamente aleatória dos elementos finitos e dos nós. As matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ , resultantes da discretização do problema, são esparsas sendo a maior parte dos seus elementos nulos. No sentido de minimizar a largura de banda destas matrizes e, assim, reduzir o esforço de cálculo e de resolução do sistema de equações, foi utilizado a biblioteca de programas RCM em MATLAB®. Esta biblioteca implementa o algoritmo Reverse Cuthill-McKee (Cuthill e McKee, 1969; George e Liu, 1981) e, por permuta, reordena os nós e os elementos das matrizes.

Como já foi referido, a utilização de diferentes resoluções de malha no estudo das condições de ressonância e propagação e deformação de ondas é bastante vantajosa. Assim, a resolução das malhas consideradas é progressivamente mais refinada consoante a aproximação à zona de interesse conseguindo uma maior economia em termos de tempo de cálculo mantendo uma boa precisão nos resultados.

#### 3.6.2. GENERALIDADES - PDE TOOLBOX

A *Partial Differential Equation (PDE) Toolbox* é uma poderosa e flexível ferramenta no estudo e resolução de equações de diferenças parciais em duas dimensões espaciais e tempo. Estas equações são discretizadas pelo método dos elementos finitos. As potencialidades de que a *PDE Toolbox* dispõe permite a definição do problema (regiões 2D; condições de fronteira; coeficientes), a resolução numérica do problema (construção de malhas de elementos finitos; discretização das equações; aproximação da solução) e a visualização dos resultados. É possível resolver os seguintes problemas num domínio  $\Omega$ :

o problema elíptico

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f ; \quad (3.30)$$

o problema parabólico

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f ; \quad (3.31)$$

o problema hiperbólico

$$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f ; \quad (3.32)$$

e o problema de valores próprios

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du , \quad (3.33)$$

onde  $a, c, d$  e  $f$  são coeficientes ou formas funcionais definidas no domínio  $\Omega$  e  $\lambda$  é um valor próprio. Os coeficientes  $a, c, d$  e  $f$  são definidos, ou para cada nó da malha, ou no ponto central de cada elemento finito. Neste trabalho optou-se pela definição no centro de cada elemento finito. A *PDE Toolbox* resolve as equações diferenciais usando o método dos elementos finitos em problemas definidos em domínios limitados no plano. Neste trabalho apenas interessará a resolução da equação elíptica de Berkhoff e do problema de valores próprios.

### 3.6.3. PROBLEMA ELÍPTICO

Recorde-se a equação de Berkhoff que se escreve como

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \eta = 0 . \quad (3.34)$$

A equação elíptica resolvida pela *toolbox* é apresentada na seguinte forma:

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f , \quad (3.35)$$

no domínio  $\Omega$ . Os coeficientes  $c, a$  e  $f$  são funções complexas e  $u$  é a solução desconhecida, também ela uma função complexa, definidos em  $\Omega$ . A função  $u$  representará, na equação de Berkhoff, a elevação da superfície livre no domínio  $\Omega$ . Os restantes coeficientes serão então

$$c = -CC_g , \quad (3.36)$$

$$a = \omega^2 \frac{C_g}{C} , \quad (3.37)$$

e

$$f = 0 . \quad (3.38)$$

As condições de fronteira definidas para este problema caracterizam uma combinação de  $u$  e da sua derivada na fronteira.

- Condição de Dirichlet

$$hu = r , \quad (3.39)$$

na fronteira  $\partial\Omega$ . A condição de Dirichlet não é utilizada no problema de Berkhoff.

- Condição de Neumann generalizada

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u) + q u = g , \quad (3.40)$$

em  $\partial\Omega$ . A condição de Neumann generalizada corresponde às condições de fronteira de radiação e geração-radiação nas seguintes combinações:

Para a condição de radiação (onda cilíndrica)

$$c = -C C_g , \quad (3.41)$$

$$q = -\left(i k - \frac{1}{2r}\right) C , \quad (3.42)$$

e

$$g = 0 ; \quad (3.43)$$

para a condição de geração-radiação (onda plana em fronteira circular)

$$c = -C C_g , \quad (3.44)$$

$$q = -ik C , \quad (3.45)$$

e

$$g = -i k C (1 + \cos \alpha) \eta_I . \quad (3.46)$$

A solução numérica é obtida pela *PDE Toolbox* pela resolução de um sistema de equações algébricas do tipo (3.26), na forma  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

### 3.6.4. PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS

Em estudos de ressonância em portos, o problema de valores próprios é associado à determinação de modos e frequências naturais de oscilação. O problema de valores próprios tratado pela *PDE Toolbox* é definido como

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du, \quad (3.47)$$

em que  $\lambda$  é o valor próprio a determinar. Comparando as equações (3.47) e (3.34) conclui-se

$$\lambda = \omega^2, \quad (3.48)$$

$$c = CC_g, \quad (3.49)$$

$$a = 0 \quad (3.50)$$

e

$$d = \frac{C_g}{C}. \quad (3.51)$$

É utilizada uma condição de fronteira do tipo Neumann generalizada na fronteira de radiação:

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u) + qu = u, \quad (3.52)$$

com

$$c = CC_g, \quad (3.53)$$

$$q = -\left(ik - \frac{1}{2r}\right) C, \quad (3.54)$$

e

$$g = 0. \quad (3.55)$$

A condição de reflexão total nas fronteiras sólidas conduz à anulação do integral de fronteira em  $\partial\Omega_1$ .

A solução numérica é obtida pela *PDE Toolbox* resolvendo um problema algébrico de valores e vetores próprios do tipo (3.28), na forma

$$(K - \lambda M) = 0. \quad (3.56)$$

O problema de valores próprios generalizado (3.56) é resolvido pelo algoritmo de Arnoldi (1951) aplicado a uma matriz transformada e invertida que, por repetições, encontra todos valores próprios num intervalo especificado.

### 3.6.5. COMPONENTE HORIZONTAL DA VELOCIDADE

O cálculo da velocidade dos movimentos horizontais nos pontos do domínio pode ser efetuado após a determinação da solução para a elevação da superfície livre. É de salientar a importância deste tipo de movimentos em fenómenos de ressonância.

As equações escalares que descrevem as componentes horizontal e vertical da velocidade são, respetivamente

$$u = -i \frac{g}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.57)$$

e

$$w = -i \frac{g}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (3.58)$$

A *PDE Toolbox* calcula o gradiente da elevação da superfície livre no centro de cada elemento finito.

### 3.6.6. VISUALIZAÇÃO DE RESULTADOS

O conjunto de resultados a serem visualizados inclui elevações da superfície livre e valor da amplitude de onda em qualquer ponto do domínio, onda incidente, onda refletida, onda total, componentes horizontais da velocidade normalizada, ângulos de fase e modos de oscilação. Todos estes resultados podem ser visualizados graficamente para fácil interpretação.

Nos problemas de ressonância e na generalidade de problemas de propagação de ondas, os resultados são usualmente apresentados em termos do fator de amplificação descrito pela relação entre a amplitude de onda num determinado ponto do domínio e a amplitude da onda incidente. Como a altura de onda é desconhecida *a priori*, a representação gráfica de uma onda incidente progressiva forçada de amplitude unitária permite através obter uma visão global das elevações de superfície livre e fatores de amplificação resultantes em todo o domínio. As velocidades máximas e mínimas dos movimentos horizontais correspondendo, respetivamente, a zonas nodais e zonas ventrais podem também ser facilmente identificáveis. A *PDE Toolbox* permite ainda obter uma visualização 2D e 3D animada do andamento de uma onda total e dos modos de oscilação numa bacia.



## 4

**RESSONÂNCIA EM BACIAS PORTUÁRIAS****4.1. INTRODUÇÃO**

A validação dos resultados do modelo numérico far-se-á primeiramente pela sua aplicação a casos de teste em bacias de geometria simples das quais existam análises e resultados teóricos. O modelo será aplicado a diferentes exemplos de configurações geométricas de uma bacia retangular simples:

- bacia retangular aberta;
- bacia retangular com três diferentes posições assimétricas de entrada;
- bacia retangular simétrica com três diferentes graus de abertura.

A análise destes resultados permitirá avaliar a precisão e validade do modelo testado, analisar o seu comportamento e estender a sensibilidade em relação ao seu modo de aplicação e limitações. Poderá analisar-se a influência das condições de fronteira impostas e da discretização do domínio na solução aproximada. Tanto no problema das oscilações forçadas (problema elíptico), como no problema das oscilações livres (problema de valores próprios), a precisão da solução apresentada poderá ser diretamente influenciada pelo número de pontos considerado por comprimento de onda pelo que este não deverá ser inferior a dez.

Posteriormente será aplicado o modelo a dois casos de portos reais de domínio complexo avaliando o comportamento deste em situações de ressonância. Os portos analisados são o Porto da Baleeira e o Porto de St. Quay-Portrieux. Para estes portos, cálculos de ressonância foram realizados no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) e os resultados para certos períodos ressonantes estão apresentados em Fortes (1993). Será feita uma análise comparativa entre o modelo PDE\_Berkhoff e os resultados do modelo de Fortes. É importante a aplicação do modelo a casos reais pois são domínios complexos pondo realmente à prova as condições de fronteira impostas e a discretização do domínio de maneira a se interpretar os resultados em situações efetivamente prováveis.

Finalmente, será aplicado o modelo à bacia do Porto de Leixões, analisando-se as condições de ressonância e os fatores de amplificação em vários setores do porto. Em constante crescimento, o Porto de Leixões já sofreu várias alterações desde a sua configuração inicial até aos dias de hoje. Note-se que a alteração ou a construção de novas estruturas em portos poderão alterar as condições de ressonância destes o que, por vezes, significa um agravamento na suscetibilidade dos portos na presença de oscilações ressonantes.

Em todos os casos testados, o domínio é discretizado por uma malha de elementos finitos triangulares, gerada pelo programa Triangle, de diferentes resoluções à medida que se vai aproximando da costa, em função da profundidade local e da zona em estudo. Para o cálculo do número de pontos por comprimento de onda foi utilizada a onda de período mínimo correspondente ao intervalo de valores testado em cada um dos casos. Deste modo, todos os números de pontos por comprimento de onda apresentados

(excluindo os exemplos cujos períodos de onda sejam especificados) corresponderão ao número mínimo de pontos para a situação extrema estipulando um limite inferior.

No problema de valores próprios procedeu-se a uma convergência no valor dos períodos próprios dado estes serem inicialmente calculados assumindo a celeridade de ondas longas. A convergência é obtida poucas iterações depois resultando num período ressonante.

A condição de fronteira implementada nas fronteiras fixas é a de reflexão total. Na fronteira aberta foi imposta a condição de radiação de onda cilíndrica para o caso do problema de valores próprios e a condição geração-radiação de onda plana numa fronteira circular no caso do problema elíptico. A fronteira aberta representada em todos os domínios é semicircular com três mil metros de raio considerando-se suficientemente afastada dos obstáculos. Em todos os casos de oscilações forçadas, a onda incidente na fronteira de geração-radiação foi, de facto, uma onda estacionária.

## 4.2. RESSONÂNCIA EM BACIAS SIMPLES

Como tem sido referido ao longo deste trabalho, o estudo de ondas de longo período em bacias portuárias é importante pois podem provocar fenómenos de ressonância. Este fenómeno traduz-se num aumento progressivo da amplitude de onda no interior e grandes velocidades de movimentos horizontais dos portos com consequências graves para as estruturas e embarcações atracadas. O modelo numérico resolve a equação de Berkhoff, válida para ondas de longo período, sendo que é apropriado na interpretação deste tipo de situações.

### 4.2.1. BACIA RETANGULAR

#### CARACTERIZAÇÃO

Considere-se o caso de uma bacia retangular simples, completamente aberta e inserida perpendicularmente à costa.

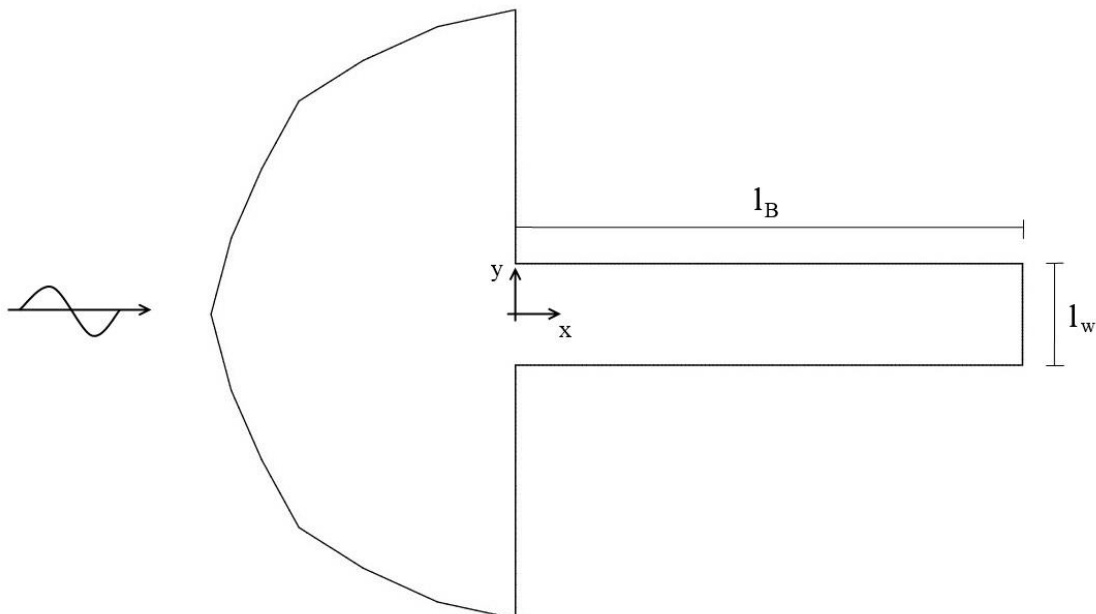
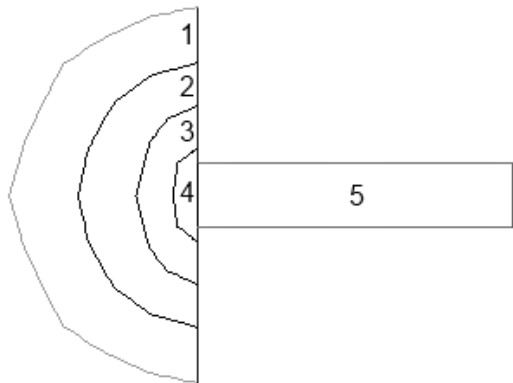


Figura 4.1 - Domínio de cálculo para uma bacia retangular

A geometria da bacia está representada na Figura 4.1 e corresponde a um comprimento  $l_B = 5000 \text{ m}$  e a uma largura  $l_w = 1000 \text{ m}$ . A relação  $l_B/l_w$  é 0.2. A profundidade é constante e igual a 20 m. A zona de aproximação corresponde a um semicírculo com 3000 m de raio aproximado por doze segmentos de reta.

O domínio foi discretizado por uma malha de elementos finitos gerada pelo programa Triangle contendo 23293 elementos triangulares e 11881 nós. A malha apresenta diferentes resoluções ficando progressivamente mais definida com a aproximação à zona de interesse, neste caso, o interior da bacia. O controlo da malha foi estabelecido com a condição de os ângulos interiores dos elementos serem sempre superiores a  $20^\circ$ . A Tabela 4.1 apresenta a localização das zonas com diferentes resoluções com a correspondente abertura de elemento da malha,  $\Delta x \approx \Delta y$ , e número de pontos por comprimento de onda.

Tabela 4.1 - Caracterização das zonas com malha de diferente resolução para uma bacia retangular aberta

Localização das zonas	Zona	$\Delta x \approx \Delta y$ (m)	$L/\Delta x \approx L/\Delta y$ (mínimo)
	1	83	12
	2	68	15
	3	48	21
	4	43	24
	5	37	28

A solução para esta configuração através do modelo PDE\_Berkhoff é determinada impondo a condição de reflexão total na linha de costa e nas fronteiras interiores da bacia, enquanto na fronteira exterior é imposta uma condição de geração-irradiação para o problema de oscilações forçadas e uma condição de irradiação para o problema de oscilação livre.

A onda incidente nas oscilações forçadas corresponde à sobreposição de uma onda progressiva de amplitude unitária perpendicular à costa, com a sua reflexão na linha de costa, supondo esta retilínea, originando uma onda estacionária de amplitude dupla da da onda progressiva:

$$\eta(x) = 2a \cos kx, \quad (4.1)$$

onde  $x$  é a coordenada horizontal ao longo do comprimento da bacia e a amplitude  $a$  toma o valor 1.

#### OSCILAÇÕES FORÇADAS

Os resultados são representados através da curva de resposta que relaciona os coeficientes de amplificação com diferentes valores de  $kl_B$ . Os valores do coeficiente de amplificação correspondem a

$\eta/2a$  determinados para um ponto da fronteira  $x = l_B$ . Os períodos de onda selecionados compreendem valores de  $kl_B$  entre 0 e 5. A curva de resposta resultante será comparada com a curva da solução analítica proposta por Mei (1983), alcançada através da compatibilização numa zona intermédia da bacia das aproximações da solução assintótica ao largo e no interior da bacia.

A solução da superfície livre de Mei é apresentada por

$$\eta(x) = 2a R \cos k(x + 1) \quad (4.2)$$

sendo que  $R$  é o coeficiente de amplificação dado por

$$R = \frac{1}{\cos kl_B + \frac{kl_w}{\pi} \sin kl_B \ln \frac{\gamma kl_w}{\pi e} - i \frac{kl_w}{2} \sin kl_B} \quad (4.3)$$

em que  $\gamma$  é a constante de Euler e  $e$  é o número de Nepper.

Na Figura 4.2 estão representas as soluções do modelo PDE\_Berkhoff e da solução de Mei.

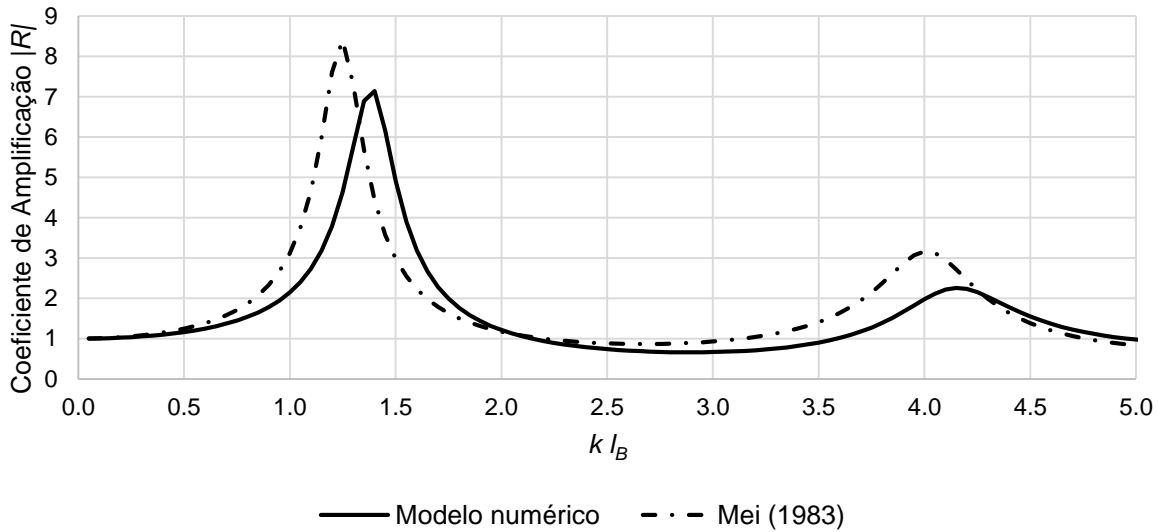


Figura 4.2 - Curvas de resposta do modelo PDE\_Berkhoff de ressonância e de Mei (1983)

Fazendo uma análise comparativa entre as duas curvas é possível verificar que existe uma razoável concordância na localização dos picos ressonantes correspondentes ao primeiro e segundo modo de oscilação no modelo numérico e na aproximação de Mei. Os valores de  $kl_B$  no primeiro pico para o modelo numérico e para a solução aproximada de Mei são, respetivamente, 1.4 e 1.25; para o segundo pico os valores correspondentes são 4.15 e 4. A partir da terceira harmónica os resultados parecem piorar. Os primeiros dois picos ressonantes no modelo numérico correspondem a coeficientes de amplificação de 7.14 e 2.26, respetivamente, não atingindo os valores teóricos da curva de Mei por uma diferença na ordem de 1.2. A Tabela 4.2 apresenta os valores de coeficiente de amplificação e respetivos valores de  $kl_B$  para a bacia retangular.

Tabela 4.2 - Valores do coeficiente de amplificação  $|R|$  e respectivos valores de  $kl_B$  para uma bacia retangular

Modo	PDE_Berkhoff		Mei		Fortes	
	$ R $	$kl_B$	$ R $	$kl_B$	$ R $	$kl_B$
1	7.14	1.40	8.41	1.25	7.77	1.31
2	2.26	4.15	3.16	4.00	2.66	4.2

Os dois modos de vibração estão representados nas Figura 4.3 e 4.4.

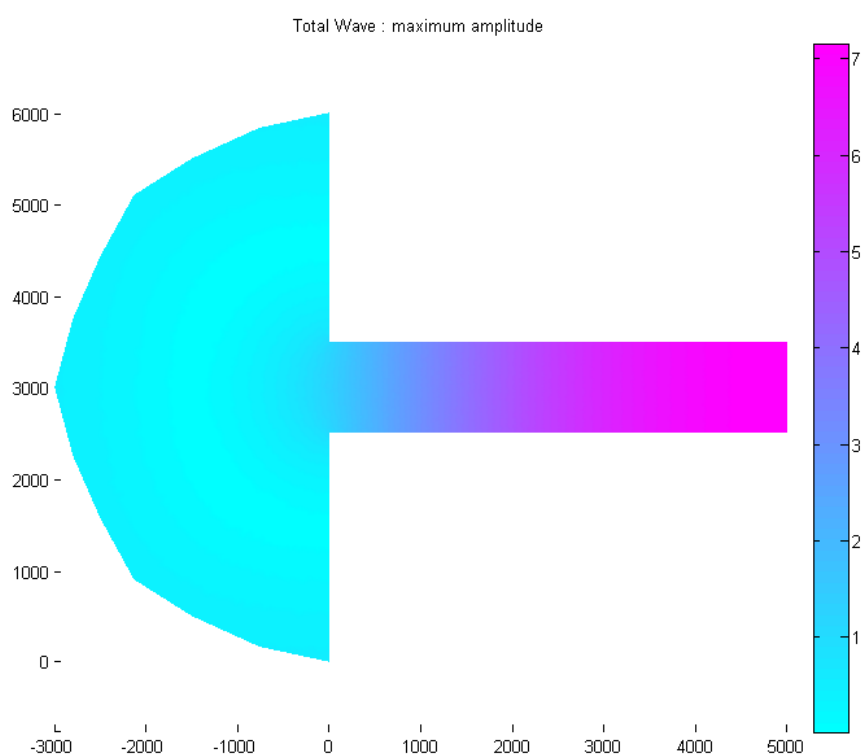


Figura 4.3 – Bacia Retangular Aberta. Modo de Vibração 1

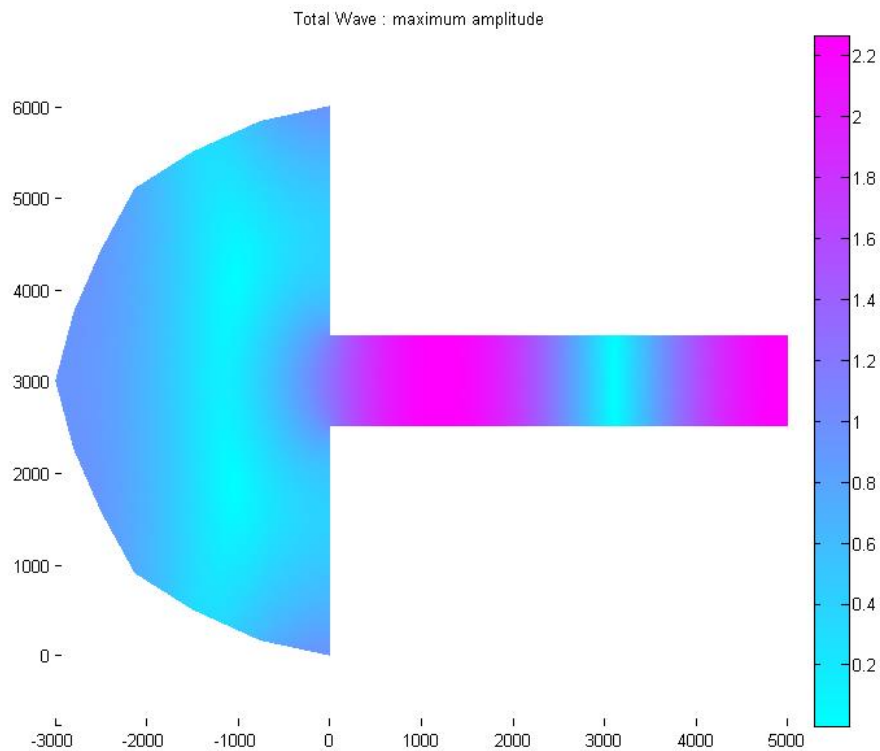


Figura 4.4 - Bacia Retangular Aberta. Modo de Vibração 2

## OSCILAÇÕES LIVRES

A resolução do problema de valores próprios permitiu determinar a posição dos dois primeiros modos de vibração correspondendo o Modo 1 a  $T = 2033 \text{ s}$  ( $kl_B = 1.1$ ) e o Modo 2 a  $T = 527 \text{ s}$  ( $kl_B = 4.25$ )

### 4.2.2. BACIA RETANGULAR COM DIFERENTES POSIÇÕES DE ENTRADA

#### CARACTERIZAÇÃO

Considere-se agora três bacias retangulares, assimétricas, geometricamente idênticas à bacia representada em Figura 4.1 mas com diferentes posições de entrada:

- bacia retangular com entrada na primeira sexta parte ( $l_w/6$ ) da largura total da bacia (ver Figura 4.5); Assimétrica 1;
- bacia retangular com entrada na segunda sexta parte ( $l_w/6$ ) da largura total da bacia (ver Figura 4.6); Assimétrica 2;
- bacia retangular com entrada na terceira sexta parte ( $l_w/6$ ) da largura total da bacia (ver Figura 4.7); Assimétrica 3.

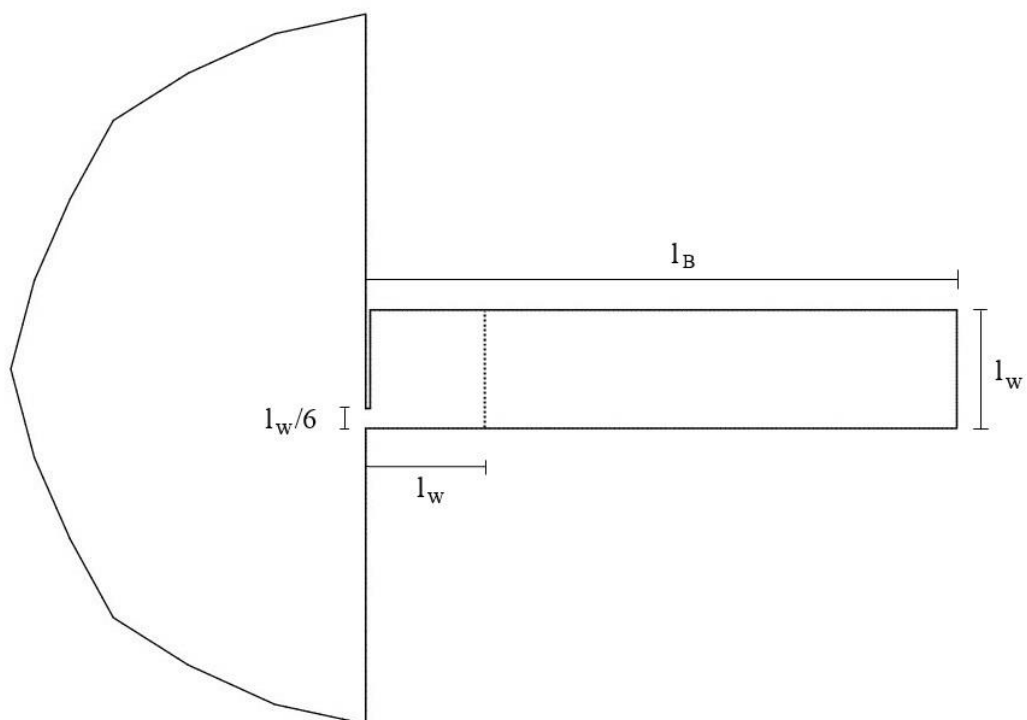


Figura 4.5 - Bacia retangular com entrada na primeira sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 1)

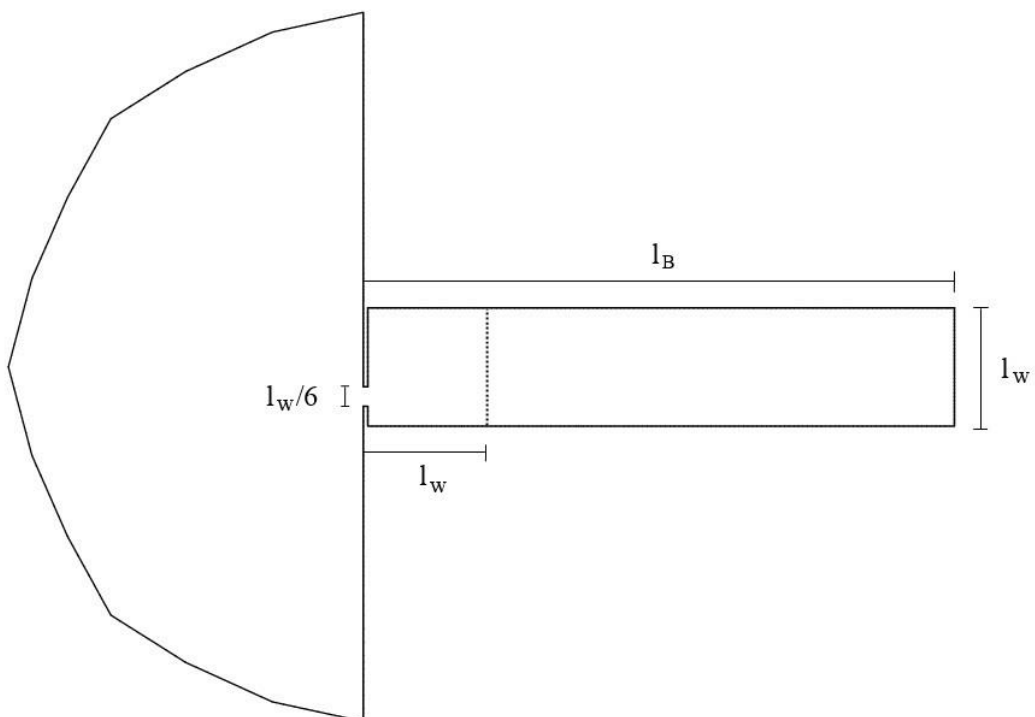


Figura 4.6 - Bacia retangular com entrada na segunda sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 2)

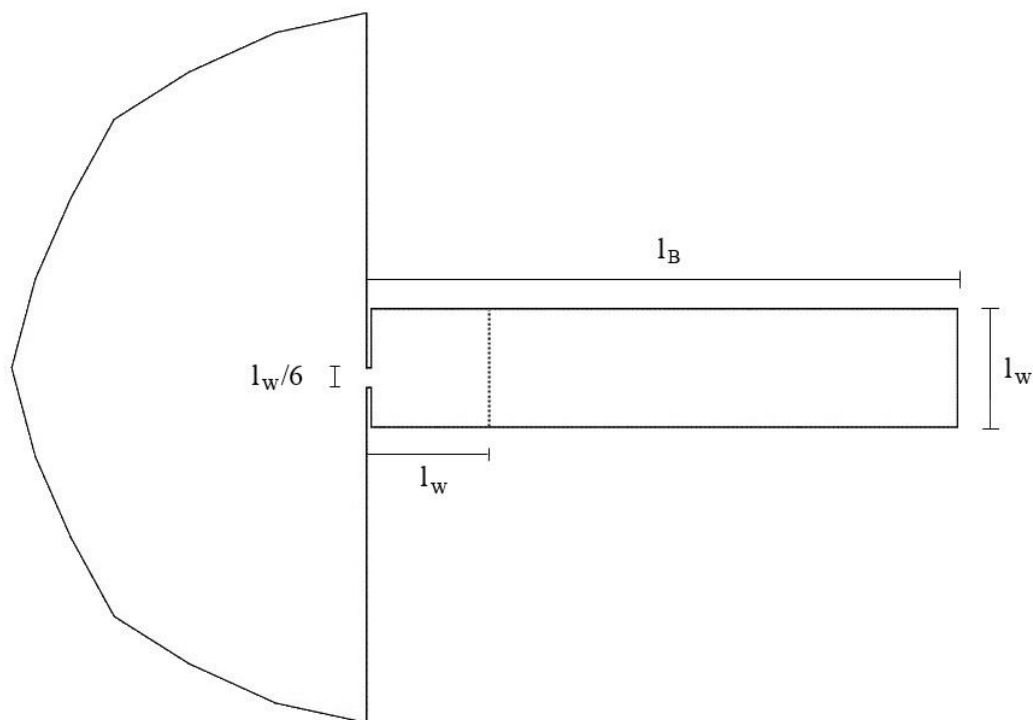


Figura 4.7 - Bacia retangular com entrada na terceira sexta parte da largura total da bacia (Assimétrica 3)

As malhas de elementos finitos geradas pelo programa Triangle, para os três exemplos, contêm cerca de 25800 elementos triangulares e 13150 nós. A resolução da malha é semelhante à da bacia retangular aberta descrita na Tabela 4.1.

De igual modo, a linha de costa e as fronteiras fixas pertencentes à bacia (incluindo o(s) quebramar(es) da entrada), são obstáculos totalmente refletores; na fronteira exterior é aplicada a condição de geração-radiação para ondas ou a condição de radiação, conforme o problema a resolver.

#### OSCILAÇÕES FORÇADAS

Os resultados são apresentados na forma de curva de resposta para  $kl_B$  entre 0 e 15 (ver Figura 4.8). Os valores do coeficiente de amplificação correspondem a  $\eta/a$ .



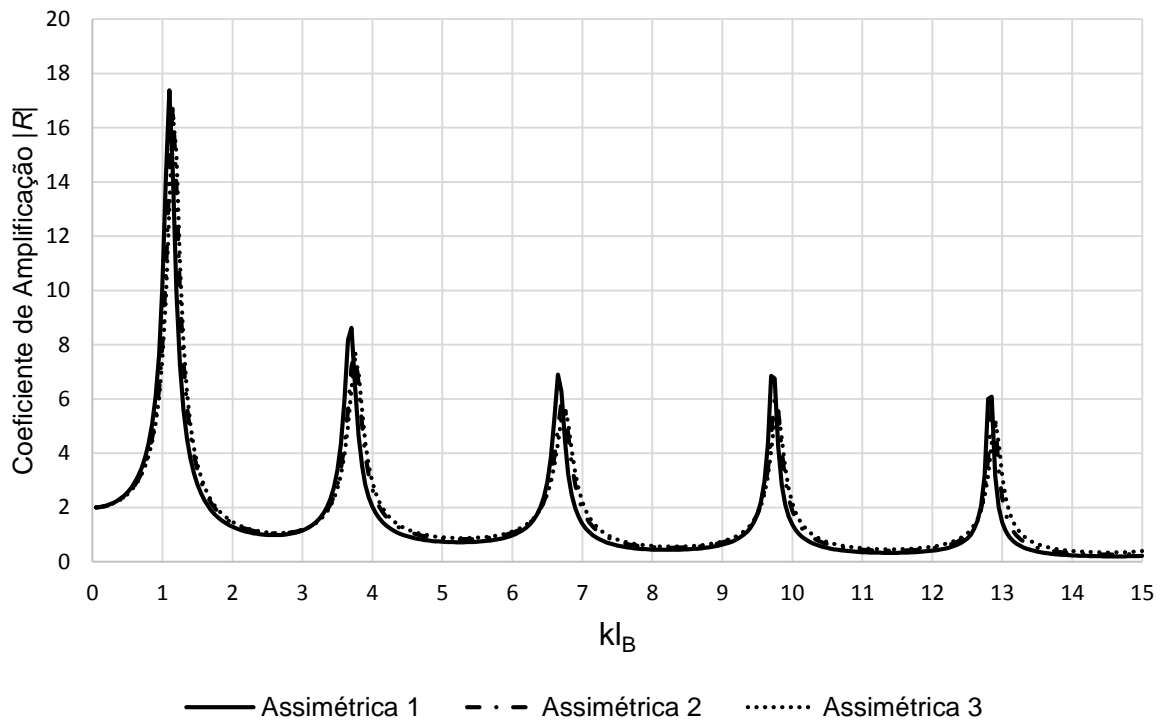


Figura 4.8 - Curvas de resposta do modelo numérico para bacias retangulares com diferentes posições de entrada

Por análise das curvas de resposta podemos concluir que as três bacias se comportam de maneira muito idêntica em todos os modos harmônicos.

A principal conclusão tirada da análise das três curvas da Figura 4.8 é a pouca influência da posição de entrada numa bacia estreita e comprida, como é o caso das bacias em questão, no que toca à ressonância. A análise das oscilações livres irá mostrar que os 5 modos de oscilação correspondentes aos 5 picos da curva de resposta no intervalo  $0 < kl_B \leq 15$  são modos de oscilação longitudinais, devido ao comprimento da bacia ser muito maior do que a sua largura, o que faz com que esta se comporte praticamente de igual forma seja qual for a posição de entrada do porto.

### OSCILAÇÕES LIVRES

A determinação das frequências próprias de oscilação e a análise dos modos de oscilação associados, permitiu concluir que todos os modos de oscilação no intervalo  $0 < kl_B \leq 15$  correspondem a oscilações longitudinais. O primeiro modo de oscilação transversal verifica-se para  $T = 141$  s, isto é  $kl_B = 15.9$  a que corresponde  $kl_w = 3.18$  (ver Figura 4.9).

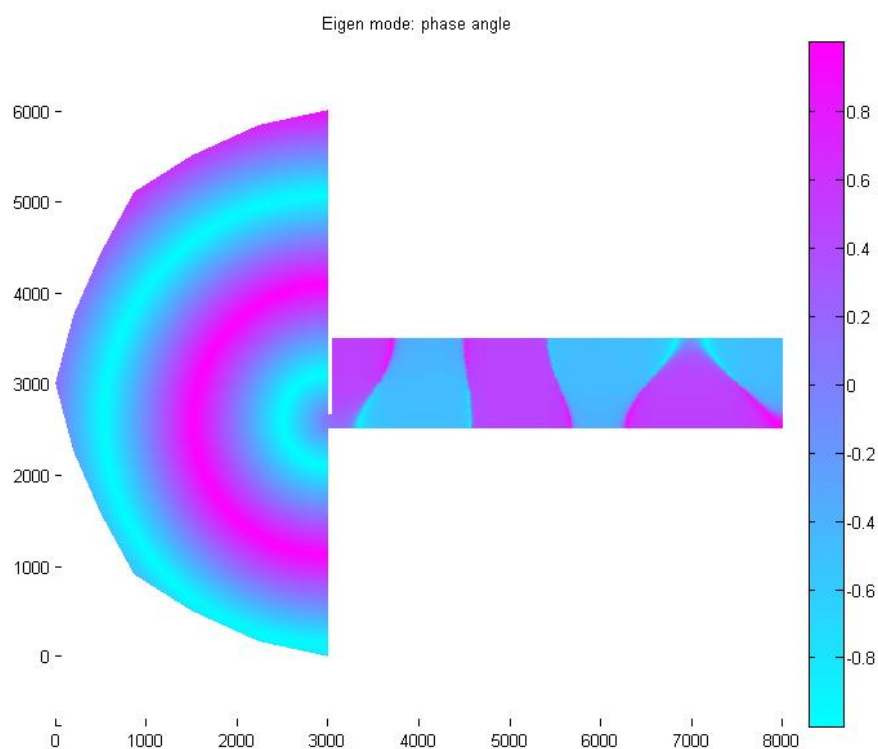


Figura 4.9 – Ângulo de fase para  $T=141$  s de uma bacia retangular assimétrica

O modo de oscilação mostrado na Figura 4.9 diz respeito à sexta harmónica. Verifica-se que os modos transversais em bacias cujo comprimento é muito superior à sua largura acontecem para valores de  $kl_B$  elevados, que correspondem a períodos inferiores.

Compare-se agora o caso da bacia Assimétrica 1 com o caso de uma bacia quadrada ( $l_B = l_w$ ), tendo a mesma posição de entrada. As Figura 4.10 e 4.11 mostram os ângulos de fase correspondentes à segunda e terceira harmónica de ambos os casos, respetivamente.

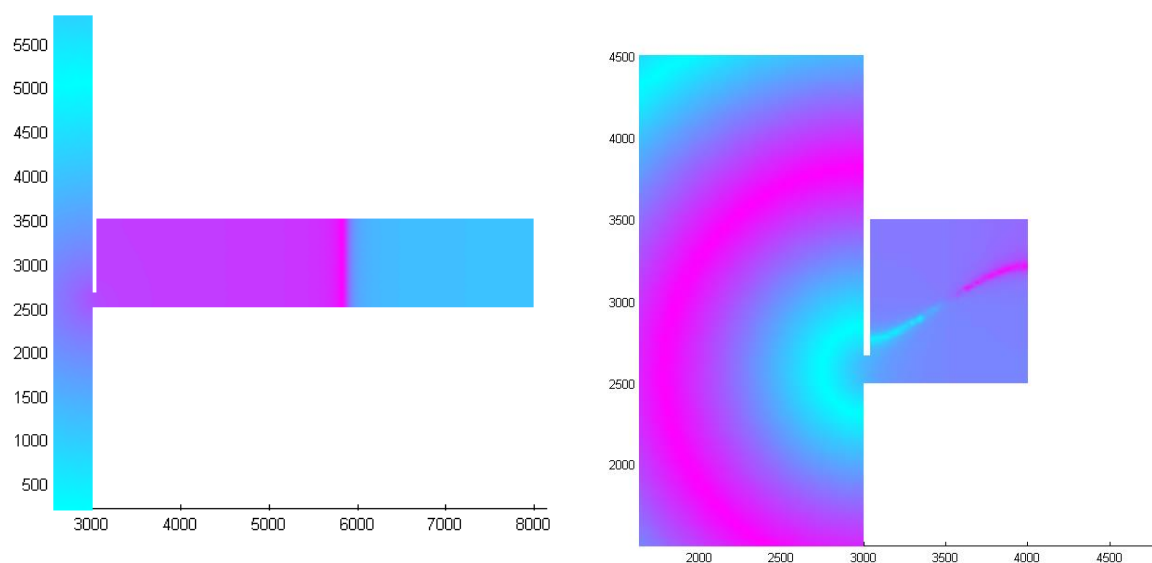


Figura 4.10 - Ângulo de fase da segunda harmónica de uma bacia retangular estreita e de uma bacia quadrada com entrada assimétrica

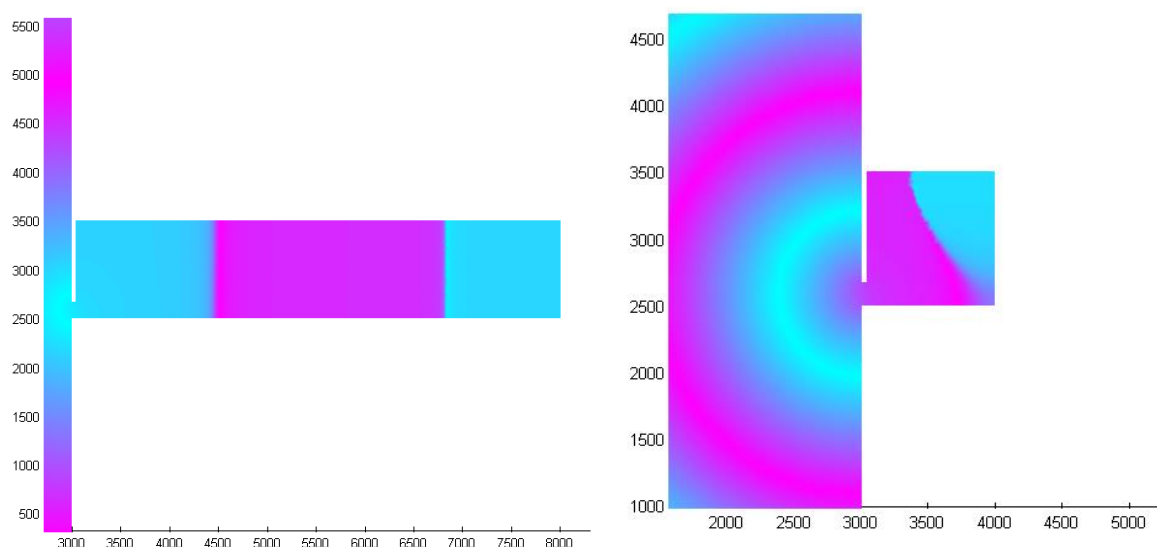


Figura 4.11 - Ângulo de fase da terceira harmónica de uma bacia retangular estreita e de uma bacia quadrada com entrada assimétrica

A bacia comprida e estreita evidencia um modo de oscilação com movimentos claramente longitudinais como se pode verificar na perpendicularidade da mudança do ângulo de fase, à semelhança do que se passa na bacia retangular aberta (Figura 4.12). A bacia quadrada com entrada assimétrica experimenta um modo de oscilação transversal adicional que, potencialmente, aumentará a amplificação. Estas oscilações transversais, além de introduzirem novos períodos ressonantes e modificações na amplificação, alteram a localização dos nodos. É possível verificar na Figura 4.10 (direita) a curvatura

correspondente à mudança de fase no interior da bacia onde se dão movimentos horizontais com velocidades máximas.

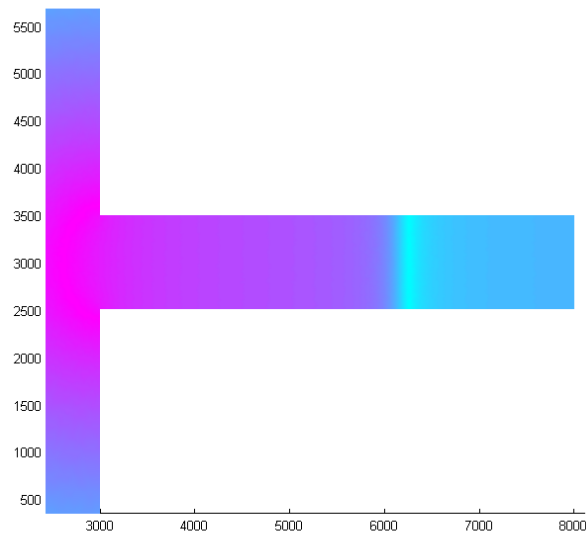


Figura 4.12 - Ângulo de fase da segunda harmónica de uma bacia retangular aberta

Por fim, pode-se concluir que, efetivamente, a posição da entrada de uma bacia retangular comprida não tem especial influência em termos de ressonância nos modos de oscilação no interior do porto. No caso de bacias quadradas, verificam-se oscilações transversais podendo ter influência nos fatores de amplificação. A alteração da localização dos nodos faz com que os movimentos horizontais das massas de água, que se verificam no interior do porto, mudem de direção tendo eventuais consequências a nível de ressonância.

#### 4.2.3. BACIA RETANGULAR COM DIFERENTES GRAUS DE ABERTURA DE ENTRADA

Analisar-se-ão agora os casos de bacias retangulares de geometria semelhante às anteriores apresentadas mas com três diferentes graus diferentes de abertura na entrada da bacia:

- bacia retangular com largura de entrada  $B/l_W = 0.05$  (ver Figura 4.13); Abertura 1;
- bacia retangular com largura de entrada  $B/l_W = 0.1$  (ver Figura 4.14); Abertura 2;
- bacia retangular com largura de entrada  $B/l_W = 0.2$  (ver Figura 4.15); Abertura 3.

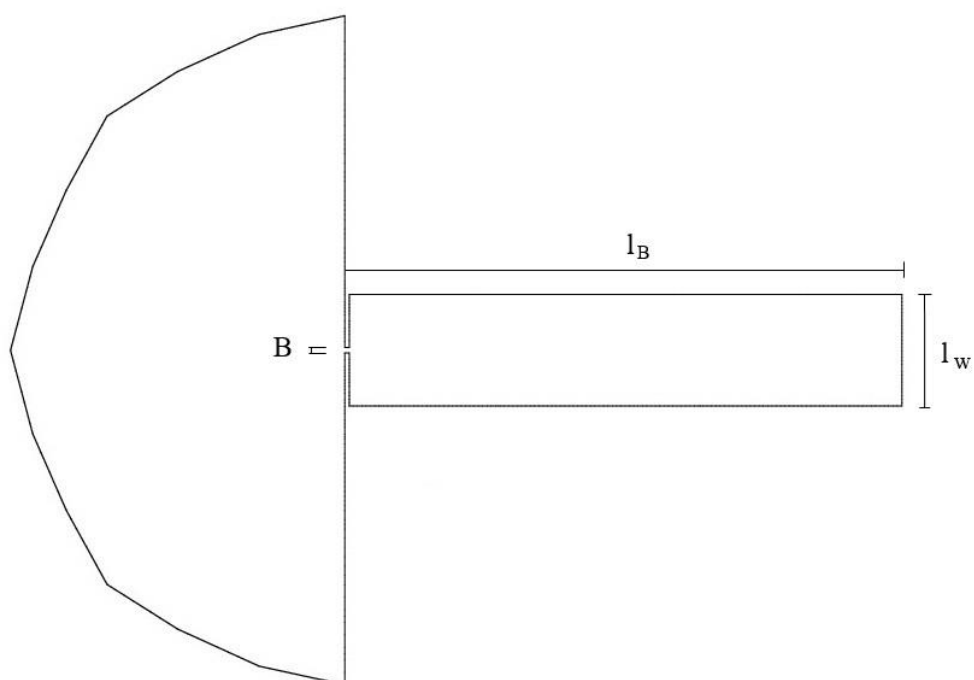


Figura 4.13 - Bacia retangular com largura de entrada  $B/l_w = 0.05$  (Abertura 1)

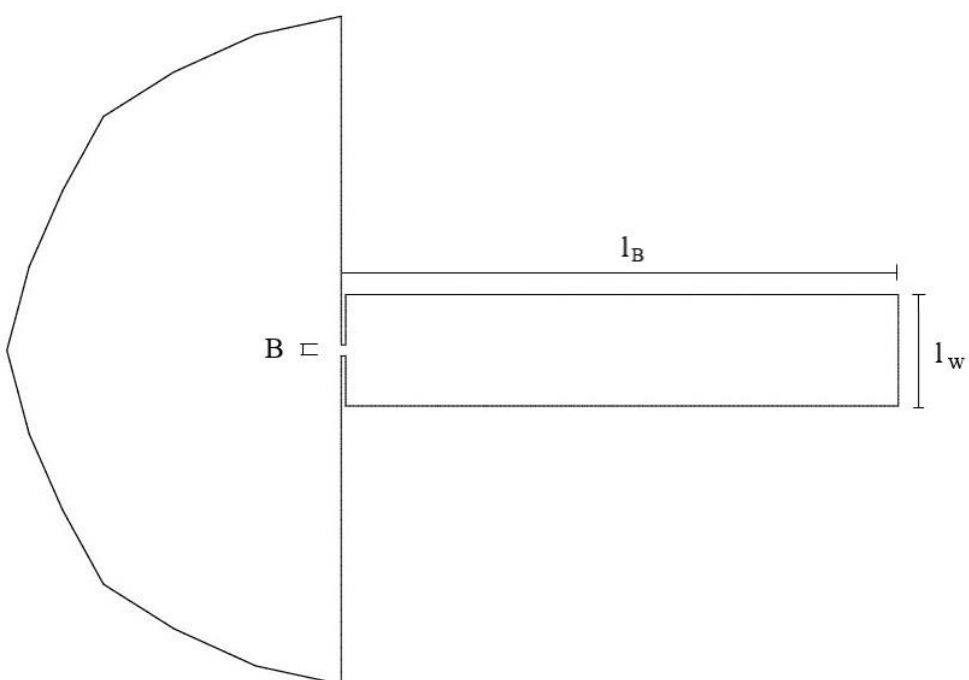


Figura 4.14 - Bacia retangular com largura de entrada  $B/l_w = 0.1$  (Abertura 2)

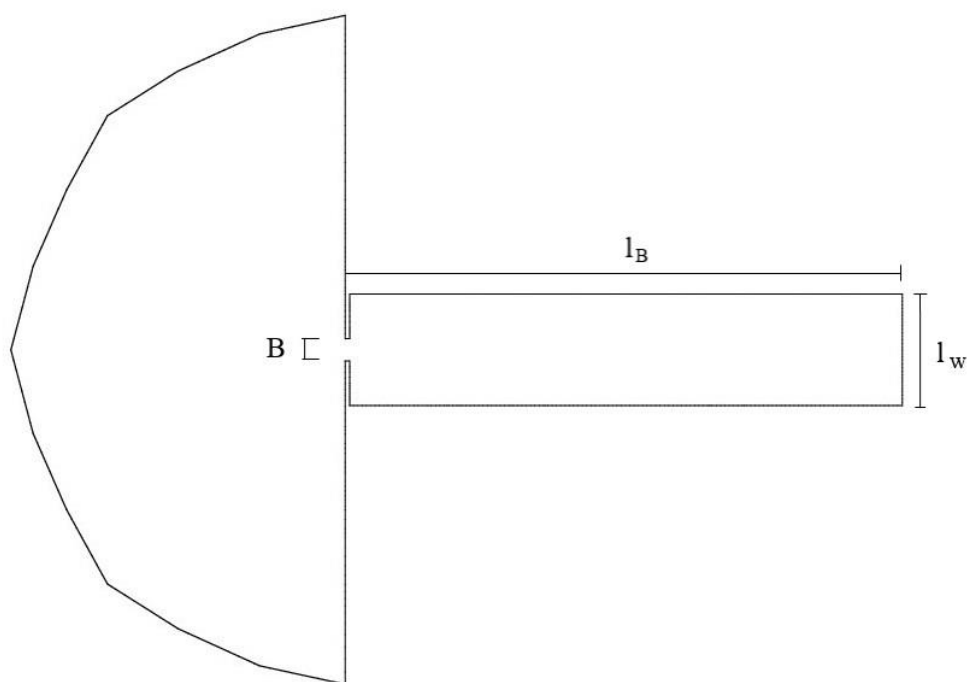


Figura 4.15 - Bacia retangular com largura de entrada  $B/l_w = 0.2$  (Abertura 3)

As malhas de elementos finitos geradas pelo programa Triangle, para os três exemplos, contêm cerca de 25800 elementos triangulares e 13150 nós. A resolução da malha é semelhante à da bacia retangular aberta descrita na Tabela 4.1.

A linha de costa e as fronteiras fixas pertencentes à bacia (incluindo o(s) quebramar(es) da entrada), são obstáculos totalmente refletores; na fronteira curvilínea é aplicada a condição de geração-radiação para ondas cilíndricas.

As curvas de resposta obtidas pelo modelo PDE\_Berkhoff para os três graus de abertura estão representadas na Figura 4.16.

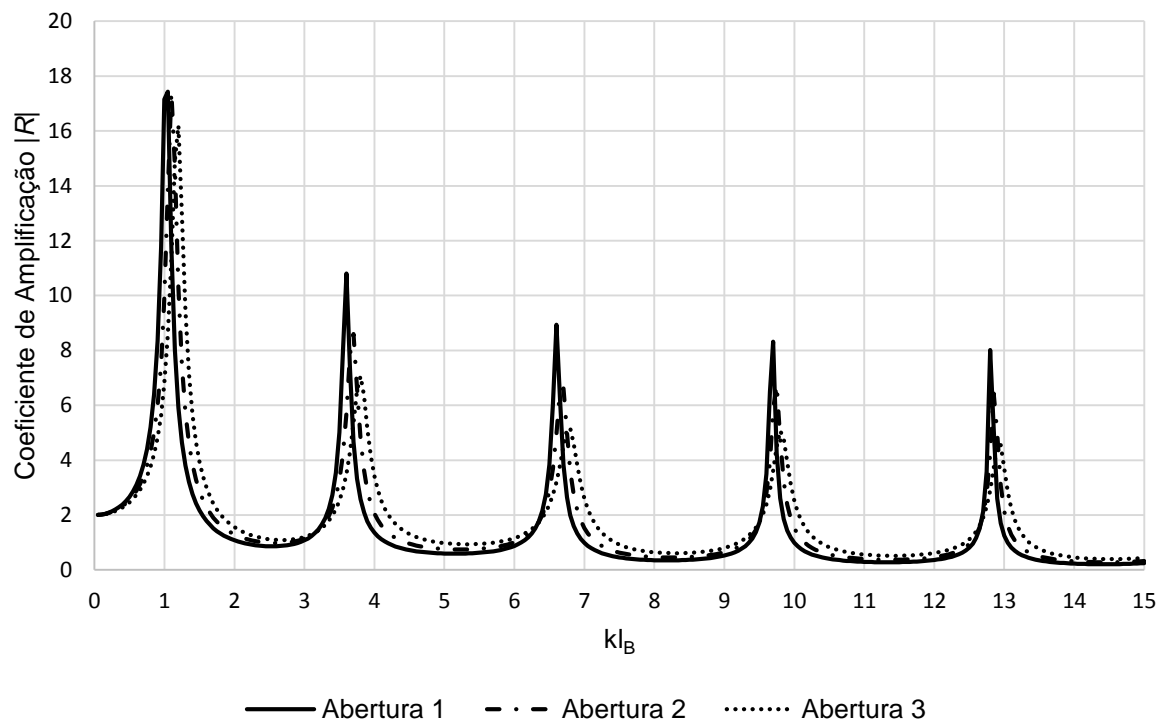


Figura 4.16 - Curvas de resposta do modelo numérico para bacias retangulares com diferentes graus de abertura

A análise da resposta ressonante das três bacias em termos do coeficiente de amplificação *versus*  $kl_B$  permite verificar que o grau de abertura da entrada do porto tem alguma influência nos picos ressonantes. O andamento das curvas é semelhante nos três casos mas verifica-se uma redução dos valores de coeficiente de amplificação máximos em modos ressonantes consoante o aumento da abertura relativa do porto. Por outro lado, os valores de  $kl_B$  em ressonância diminuem com o fecho da bacia tendendo para os valores de oscilação de uma bacia fechada.

#### 4.3. RESSONÂNCIA EM PORTOS REAIS

A aplicação de um modelo numérico a casos reais é uma boa maneira de avaliar as competências e limitações do modelo. No caso de estudos de ressonância, a aplicação a portos reais de domínio complexo permite avaliar o desempenho do modelo na propagação das ondas longas e permite ganhar sensibilidade no que diz respeito ao modo de aplicação, restrições e condições na discretização dos domínios e condições de fronteira impostas.

Os portos testados são o Porto da Baleeira, o Porto de St. Quay-Portrieux e o Porto de Leixões. Para os dois primeiros portos, será feita uma análise comparativa dos resultados com os resultados do modelo apresentado em Fortes (1993) correspondentes a situações extremas de ressonância.

Para o Porto de Leixões serão estudadas as condições de ressonância para diferentes zonas influentes do porto servindo de teste final ao modelo aplicado.

#### 4.3.1. PORTO DA BALEEIRA

##### CARACTERIZAÇÃO

O Porto da Baleeira é um porto de pesca situado em Sagres, no extremo oeste da costa Algarvia. É protegido por um quebramar com cerca de 365 m de extensão desenvolvendo-se num único alinhamento e duas pontes-cais perfuradas servindo de amarração para as embarcações e prática piscatória.

O quebramar atinge profundidades de 12 m em praticamente toda a sua extensão e a batimetria da zona de estudo tem profundidades compreendidas entre 3m e 40 m.

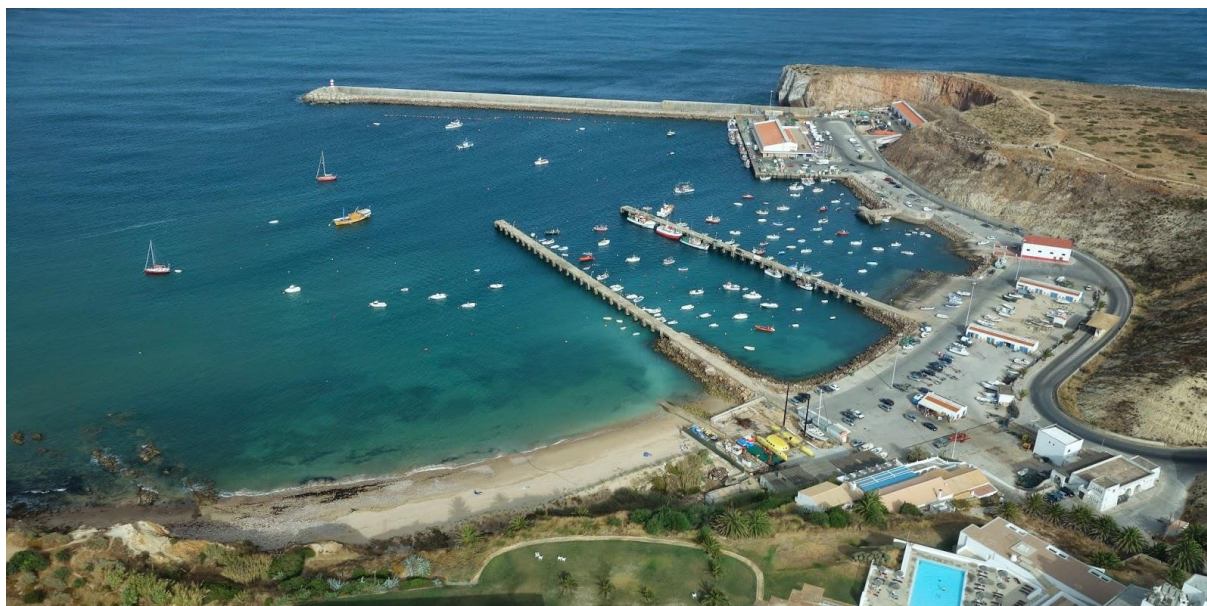


Figura 4.17 - Porto da Baleeira (Autor: A Terceira Dimensão)

Em primeira instância será feita uma análise geral das condições de ressonância do porto obtendo as curvas de resposta da bacia para diferentes zonas e posteriormente efetuar-se-á a identificação dos períodos próprios ressonantes através da resolução do problema de valores próprios. Finalmente far-se-á uma análise comparativa dos estados de agitação para períodos ressonantes e das velocidades dos movimentos horizontais registados, tomando por base os resultados do modelo numérico utilizado por Fortes (1993).

Os estudos de ressonância para o Porto da Baleeira foram efetuados para a propagação de onda incidente perpendicular a uma linha de costa retilínea na qual é inserida a bacia do porto. A batimetria foi considerada como constando de 7 plataformas constantes de diferentes profundidades variando entre os 12 m no interior da bacia e os 50 m ao largo.

O domínio considerado foi discretizado por uma malha de elementos finitos, gerada pelo programa Triangle, e contém 17457 elementos triangulares e 8884 nós. Foram utilizadas diferentes resoluções em função das zonas de diferentes profundidades sendo mais definida para menores profundidades e menos definida para maiores profundidades. A Figura 4.18 apresenta o domínio e fronteiras consideradas para o Porto da Baleeira assim como as zonas de diferentes profundidades.



A linha de fronteira representada a cor verde corresponde a um semicírculo de 3000 m de raio na qual é imposta a condição de fronteira geração-radiação. As restantes linhas de cor representam as diferentes fronteiras no contorno da linha de costa nas quais foram impostas condições de reflexão total.

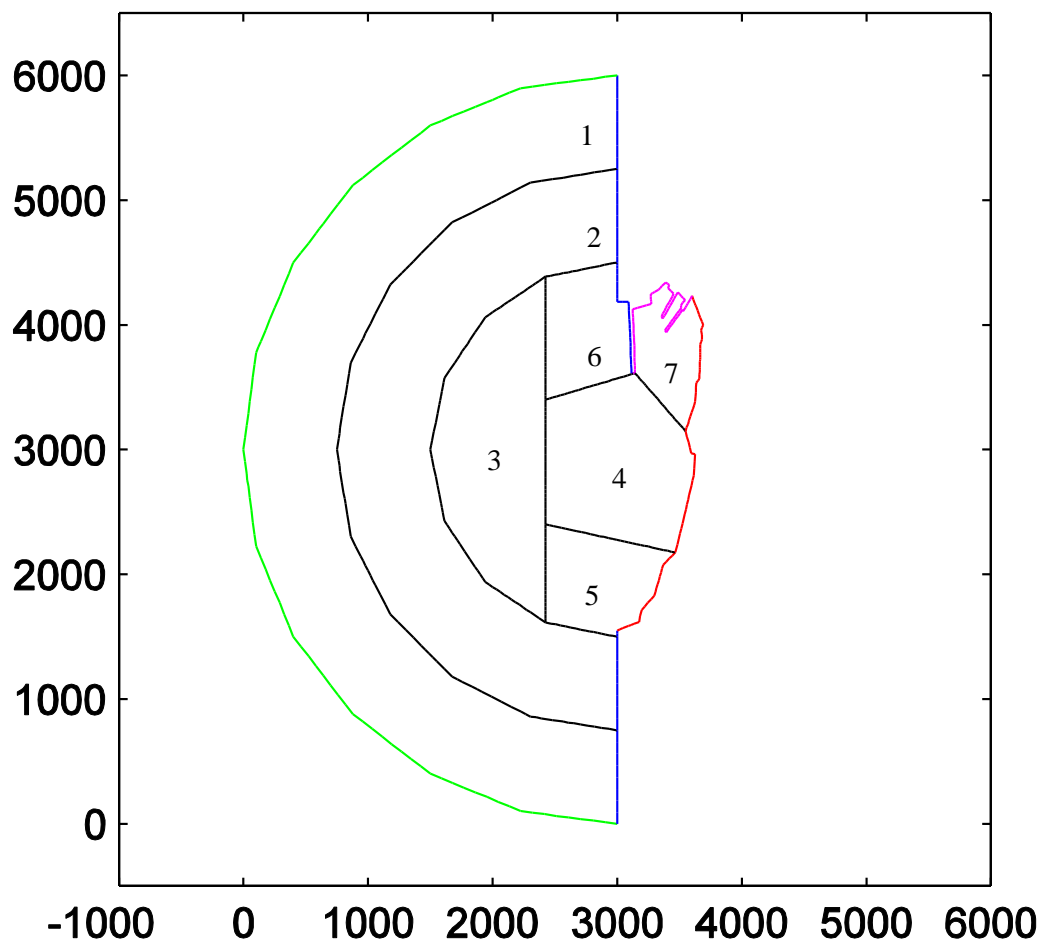


Figura 4.18 – Porto da Baleeira. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE\_Berkhoff

No modelo PDE\_Berkhoff, para este porto, foram testadas ondas com períodos compreendidos entre 45 e 9000 s pelo que o comprimento de onda para a onda mais curta corresponde a aproximadamente 630 m. As profundidades das zonas, abertura da malha e o número de pontos por comprimento de onda (para a onda mais curta) estão representados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Porto da Baleeira. Identificação e resolução das zonas

Zona	Profundidade (m)	$\Delta x \approx \Delta y$ (m)	$L/\Delta x \approx L/\Delta y$ (mínimo)
1	50	62	10
2	40	58	11
3	30	48	13
4	21	43	15
5	23	37	17
6	22	40	16
7	12	26	24

Os pontos escolhidos para representar as curvas de resposta da bacia do Porto da Baleeira e a correspondente malha de elementos finitos estão representados na Figura 4.19.

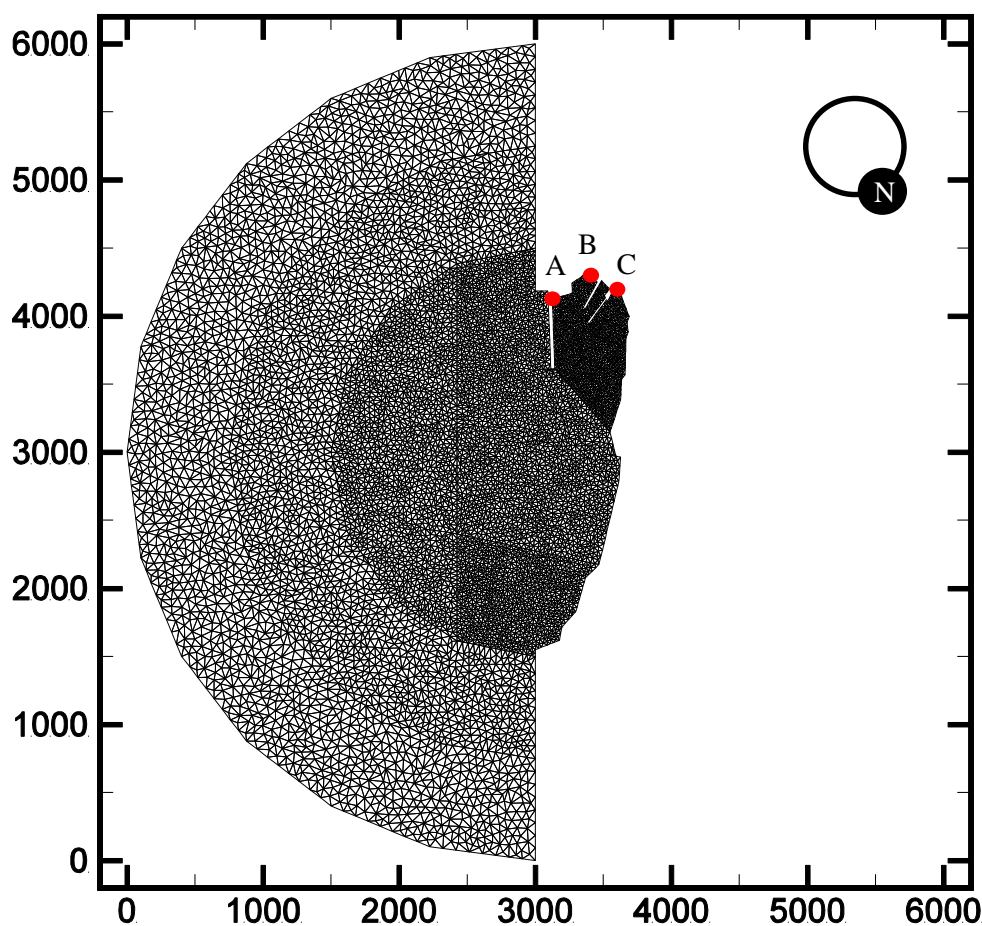


Figura 4.19 – Porto da Baleeira. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta

Apesar de estarem representadas no contorno do domínio, as duas pontes-cais são perfuradas pelo que existe malha sobre elas o que, caso contrário, poderia provocar efeitos de ressonância inexistentes. Por outro lado, os ilhéus do Martinhal, localizados na zona central da baía, não estão representados no domínio. Fortes (1993), através do modelo numérico testado, concluiu que a remoção dos ilhéus do

Martinhal não modificava as condições de ressonância no interior do porto, pelo que se optou, igualmente, pela não inclusão destes no domínio.

Nos estudos de ressonância, como são tratadas onda de longo período, o espaçamento da malha normalmente não oferece grandes dificuldades na discretização do domínio. Na Tabela 4.3 constata-se que a condição de 10 pontos por cada comprimento de onda é verificada e, contando que esse número é encontrado para uma onda cujo período é o menor do intervalo considerado para cálculo, o número de pontos será sempre igual ou superior. No entanto, nas fronteiras fixas, como não são considerados quaisquer efeitos dissipativos, o espaçamento da malha deve representar o mais corretamente possível a geometria do domínio pois as condições ressonantes nas zonas interiores e zonas abrigadas irão depender exclusivamente dessa geometria. A zona 7 corresponde à zona mais interior do porto e apresenta um número mínimo de pontos por comprimento de onda igual a 24 pelo que se considera uma resolução suficientemente grande para representar corretamente essa zona e para definir com precisão o perfil da onda.

Quaisquer eventuais problemas quanto à aplicação da equação de Berkhoff a fundos de suave inclinação por meio de plataformas de profundidade constante não se consideram significativos a ponto de alterarem as condições de ressonância. De facto, a transição entre plataformas de diferentes profundidades não se dá na vertical mas de forma linear entre o ponto central dos últimos elementos na fronteira da primeira plataforma com o ponto central dos primeiros elementos da fronteira da plataforma seguinte.

#### OSCILAÇÕES FORÇADAS

As curvas de resposta para os pontos A, B e C (ver localização na Figura 4.19) são obtidas para valores de  $kl$  entre 0 e 10 correspondendo a períodos compreendidos entre 45 e 9000 s. O valor de  $l$  adotado foi 1000 m correspondendo a um valor aproximado do comprimento da bacia do porto. Os valores de  $k$  foram calculados considerando uma profundidade constante de 20 m e a relação de dispersão de águas pouco profundas. A onda incidente é uma onda progressiva de amplitude unitária com direção perpendicular à linha de costa retilínea sobreposta a uma onda refletida numa costa retilínea considerando fundo de profundidade constante.

As curvas de resposta para os pontos A, B e C apresentam-se nas Figura 4.20 a 4.22, respetivamente, e referem-se a uma amplitude de referência unitária.

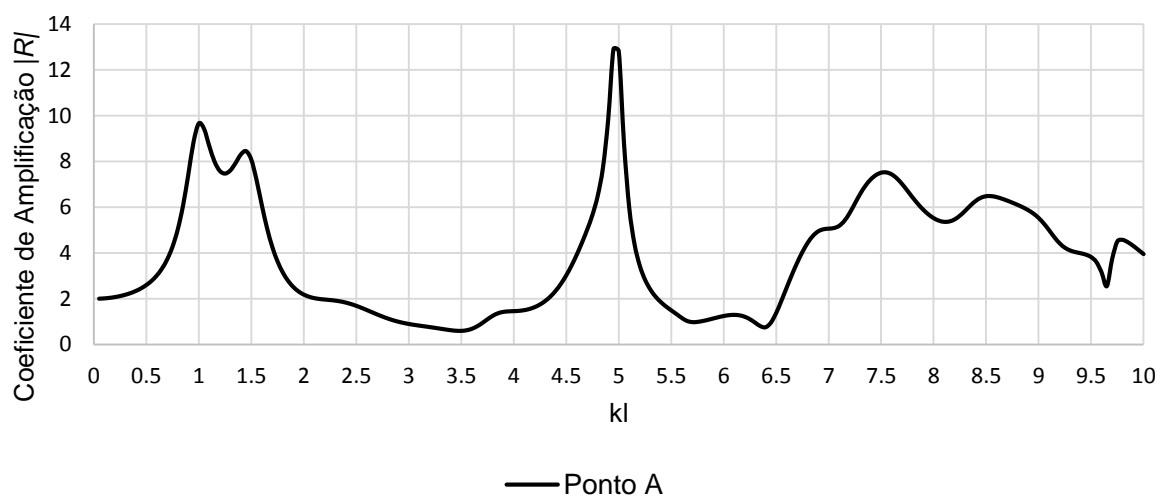


Figura 4.20 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto A

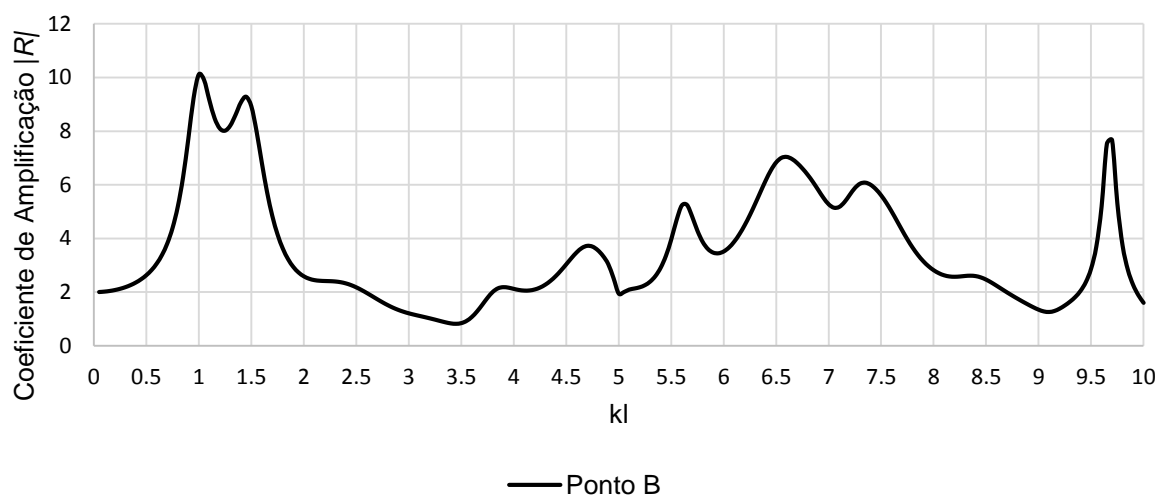


Figura 4.21 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto B

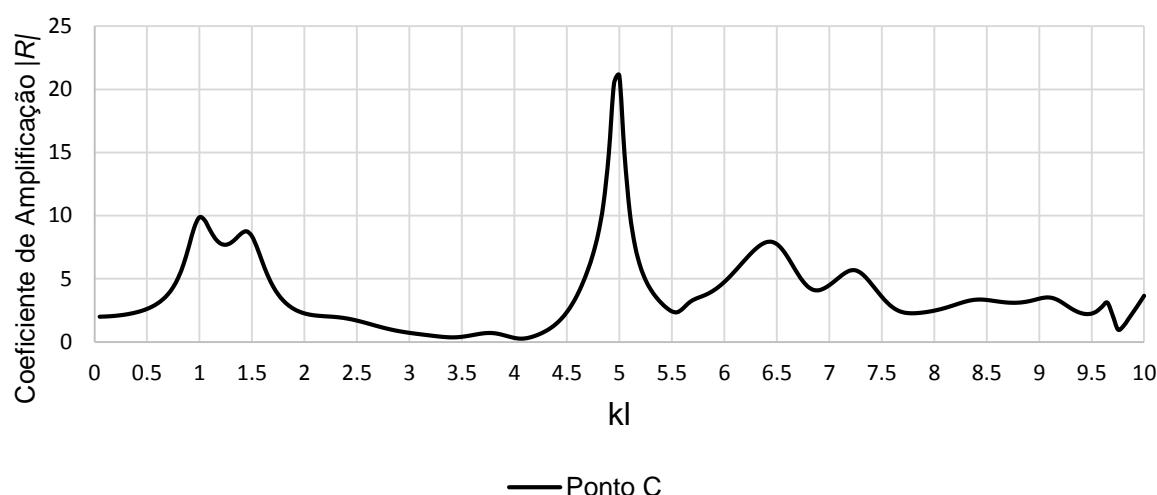


Figura 4.22 - Porto da Baleeira. Curva de resposta para o ponto C

Da análise das figuras consegue-se perceber um andamento semelhante entre as três curvas sendo que a maior diferença é a ausência do pico central ( $kl=5$ ) na curva referente ao ponto B. Dada a geometria da bacia e a direção de onda considerada, os picos relativos à primeira e segunda harmónica não são tão destacados como seria espectável e, nos pontos A e C, não correspondem aos valores máximos de coeficiente de amplificação  $R$ . A primeira harmónica acontece para um valor de  $kl$  igual a 1 atingindo o valor máximo de 10.2 no ponto B enquanto a segunda surge em  $kl$  igual a 1.45 atingindo 9.29 também no ponto B. O período correspondente ao maior coeficiente de amplificação (21.08 para o ponto C) é sensivelmente 89.7 s, correspondendo a  $kl = 5$ .

Valores para os coeficientes de amplificação máximos para o Porto da Baleeira estão apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Porto da Baleeira. Valores dos coeficientes de amplificação  $|R|$  em diferentes zonas do porto

T (s)	kl	Ponto A	Ponto B	Ponto C
448.57	1.0	9.66	10.12	9.87
309.36	1.45	8.45	9.29	8.76
89.71	5.0	12.91	1.95	21.08
79.39	5.65	1.03	5.23	2.60
69.55	6.45	0.96	6.84	7.93
61.94	7.15	6.10	5.85	5.68
59.5	7.55	7.53	5.39	3.23
46.36	9.75	2.96	8.19	2.82

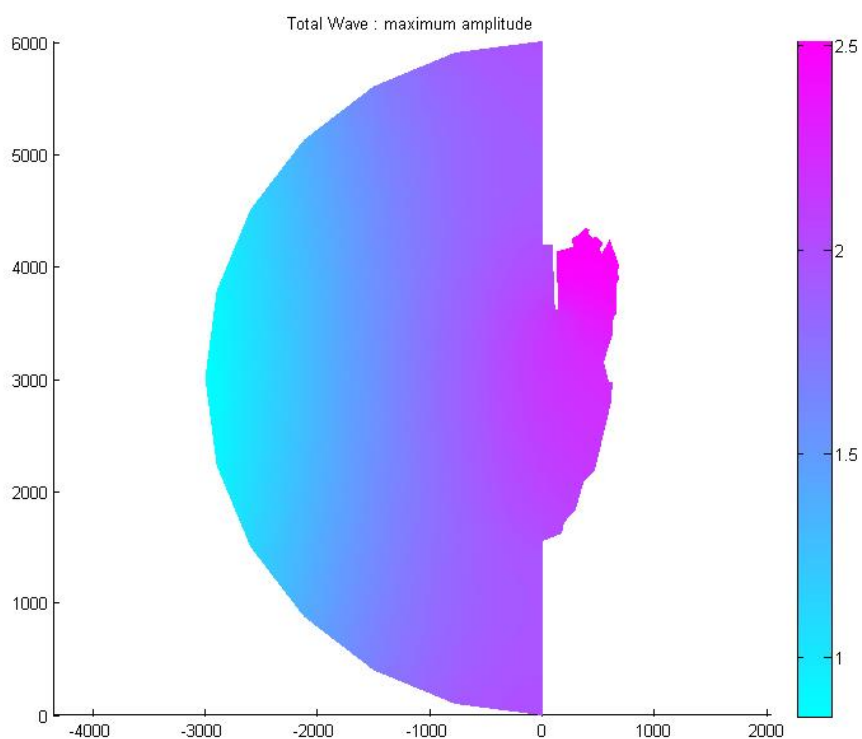
## OSCILAÇÕES LIVRES

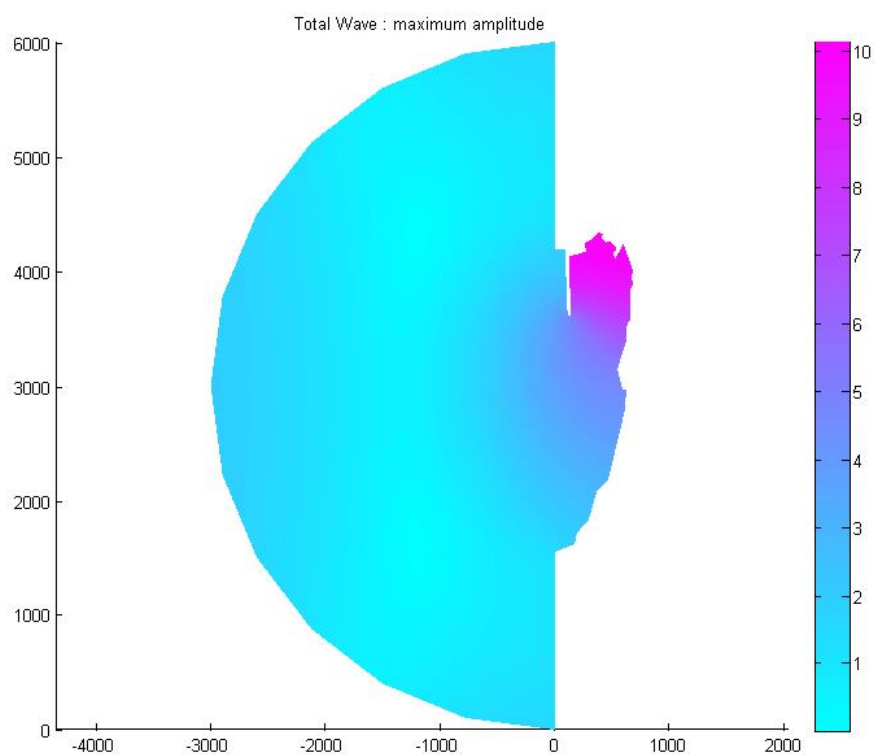
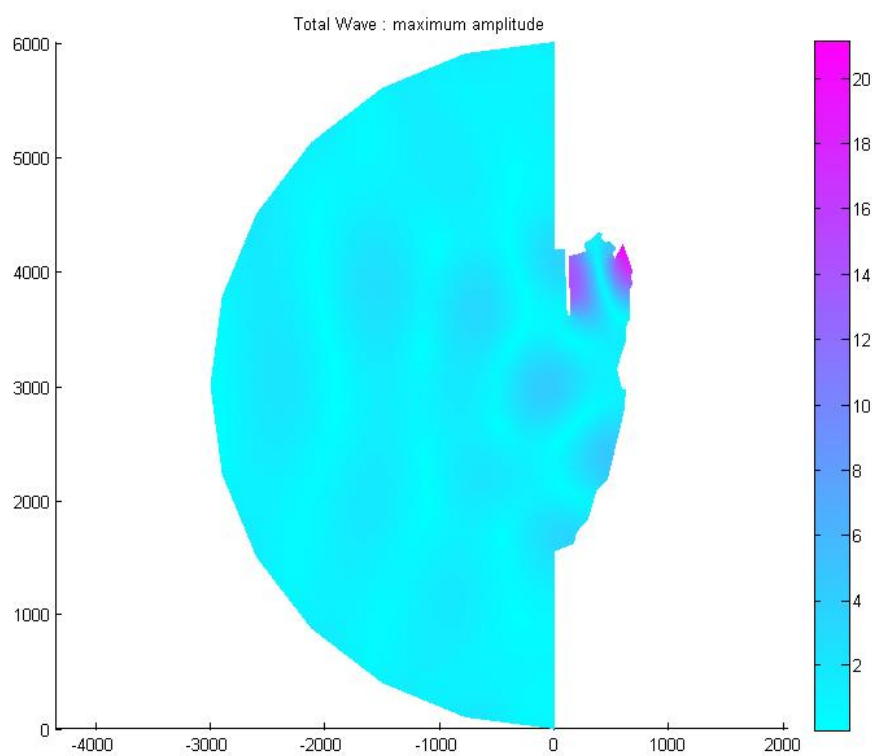
A resolução do problema de valores próprios permitiu verificar a existência de 74 períodos próprios no domínio considerado para o Porto da Baleeira, dos quais 20 correspondem a modos de oscilação no interior da bacia. Os primeiros três modos estão apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Porto da Baleeira. Modos de oscilação

Modo	T (s)	kl
1	974.5	0.46
2	365.7	1.23
3	260.2	1.72

Foram também obtidos os diagramas da distribuição dos valores de  $|R/$  e os correspondentes diagramas da distribuição de velocidades horizontais para o primeiro modo de oscilação e para os períodos  $T = 448.57\text{ s}$ ,  $T = 89.71\text{ s}$  e  $T = 46.36\text{ s}$ , que conduziram a elevados valores de coeficiente de amplificação.

Figura 4.23 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o primeiro modo de oscilação  $T=974.5\text{ s}$

Figura 4.24 – Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período  $T=448.57$  sFigura 4.25 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período  $T=89.71$  s

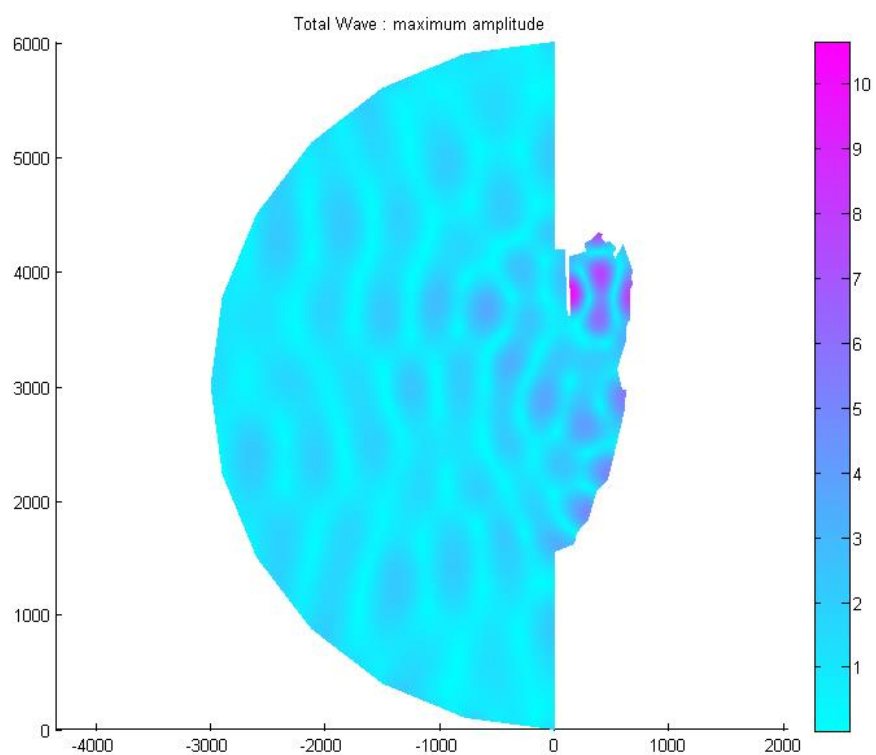


Figura 4.26 - Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período  $T=46.36$  s

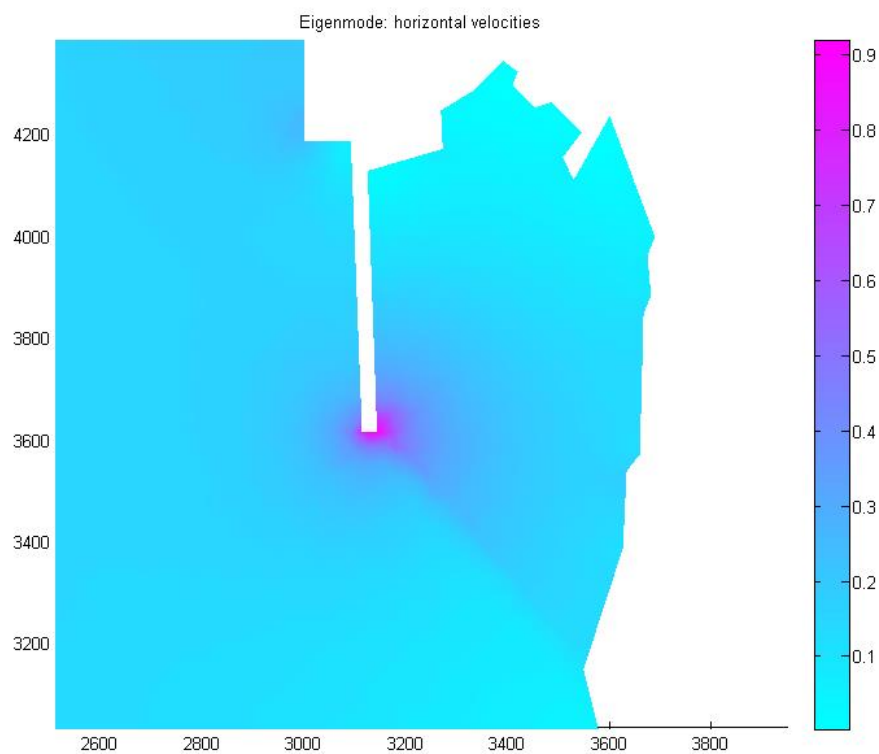


Figura 4.27 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o primeiro modo de oscilação  $T= 974.5$  s



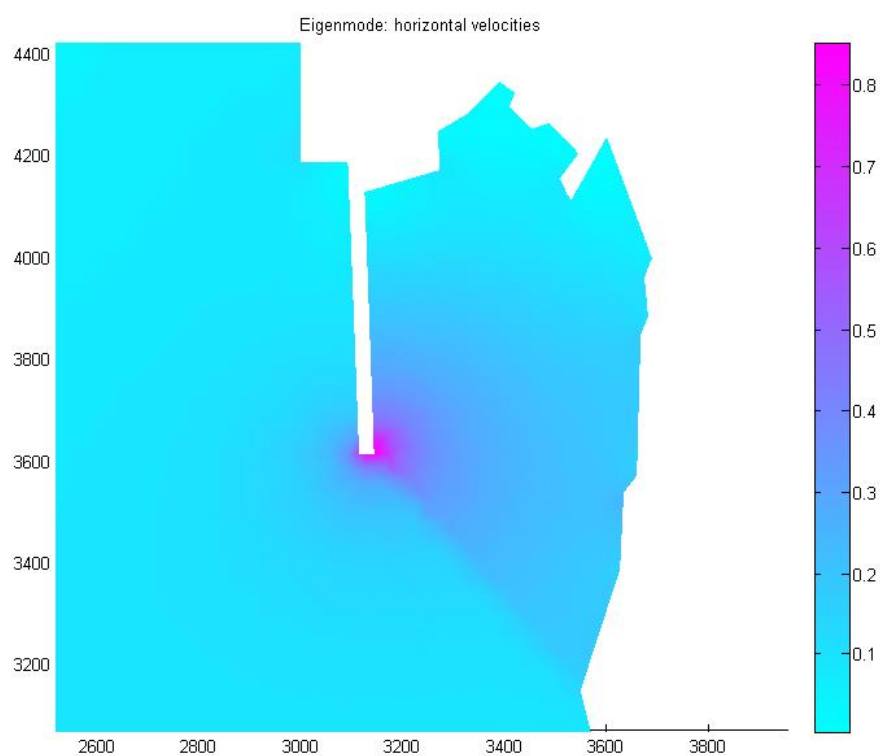


Figura 4.28 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=448.57$  s (modo fundamental)

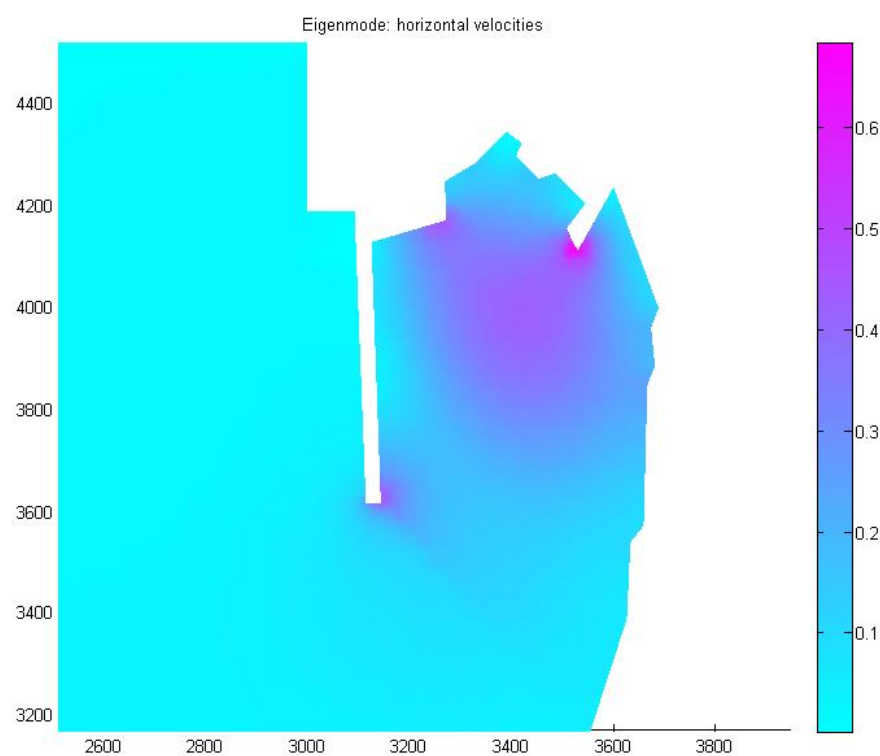


Figura 4.29 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=89.71$  s

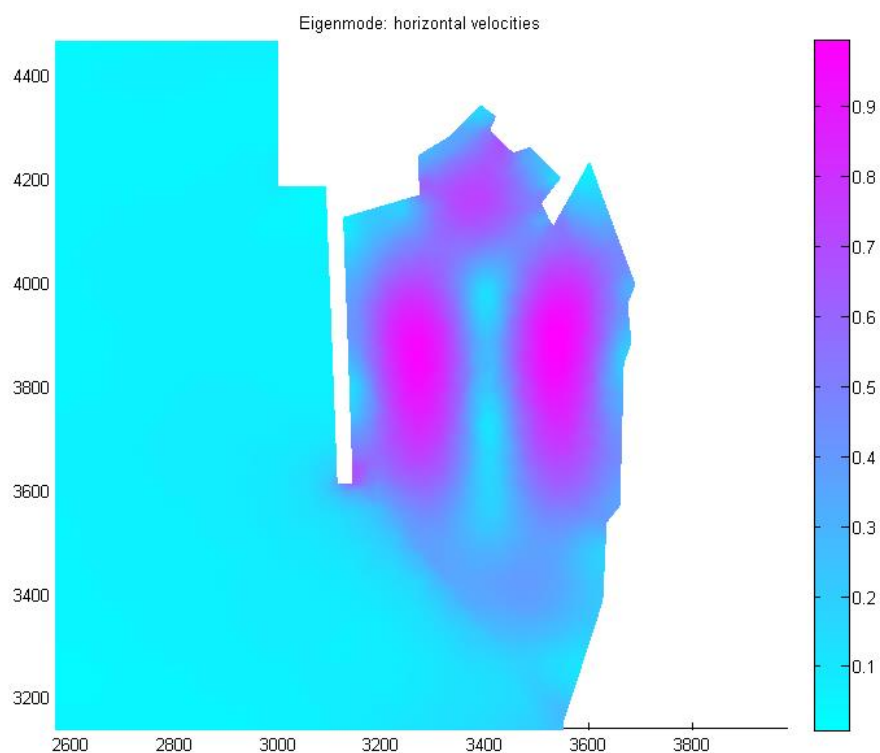


Figura 4.30 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T= 46.36$  s

Os resultados obtidos verificam a existência de fenômenos de ressonância do interior do porto e velocidades de movimentos horizontais significativas para os períodos demonstrados. No interior da bacia os valores dos coeficientes de amplificação  $|R|$  mais significativos variam entre 9 e 21.

Nas mesmas condições de fronteira (geração-radiação nos limites exteriores do domínio e reflexão total nas fronteiras fixas) e para uma direção de propagação de onda incidente praticamente semelhante, os resultados para um período igual a 270 s e uma onda de amplitude unitária do modelo aplicado por Fortes (1993) estão representados na Figura 4.31 e Figura 4.32 sob a forma de diagrama de agitação e diagrama de movimentos horizontais, respectivamente.

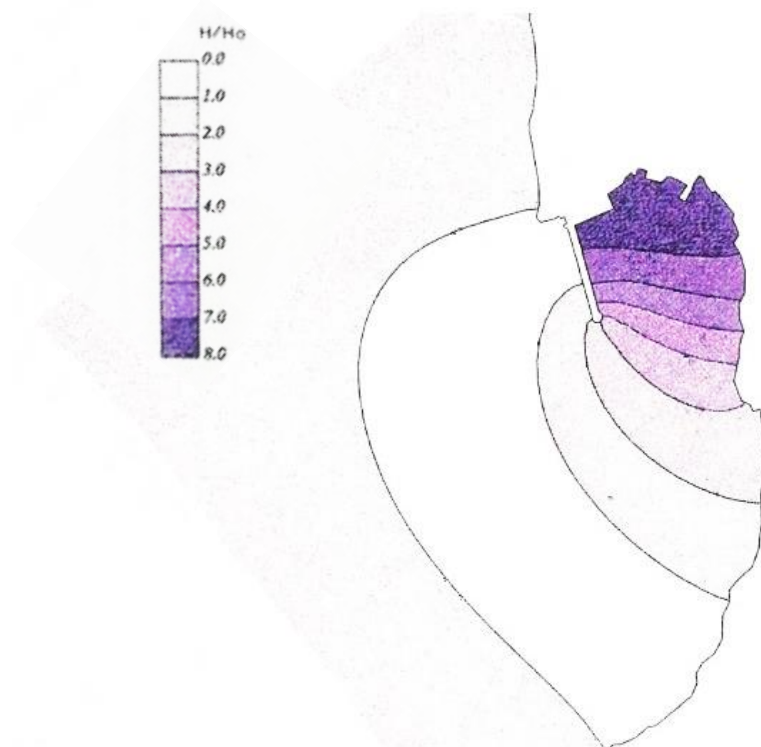


Figura 4.31 – Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período  $T=270$  s (Adaptado de Fortes, 1993)

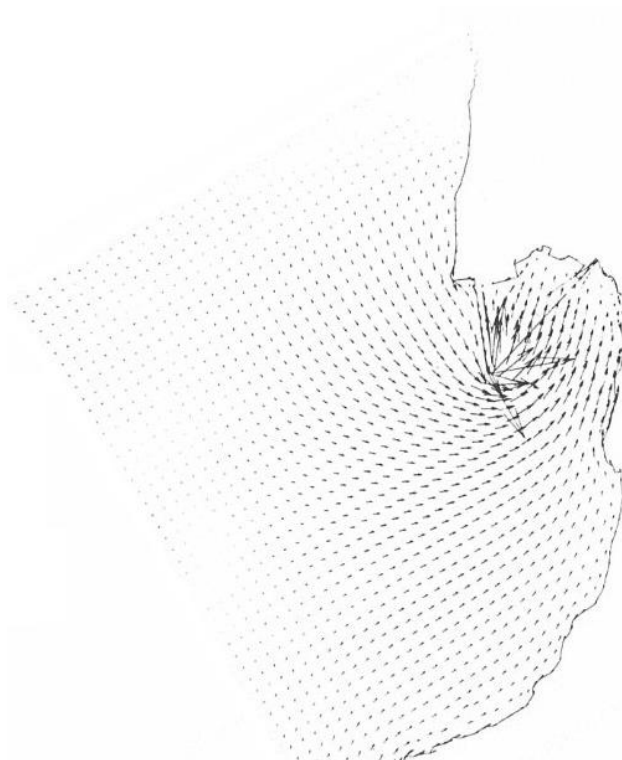


Figura 4.32 - Porto da Baleeira. Diagrama dos movimentos horizontais para o período  $T=270$  s (Adaptado de Fortes, 1993)

Os resultados para um período de 270 s obtidos pelo modelo numérico de ressonância constam do diagrama dos coeficientes de amplificação, do diagrama de velocidades horizontais normalizadas e ângulo de fase (Figura 4.33 a 4.35).

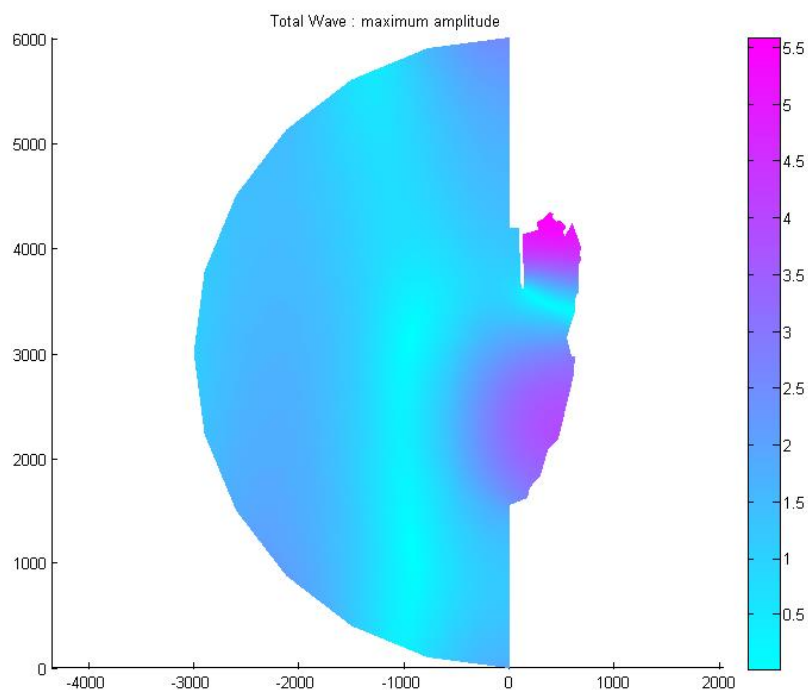


Figura 4.33– Porto da Baleeira. Diagrama de agitação para o período  $T=270$  seg

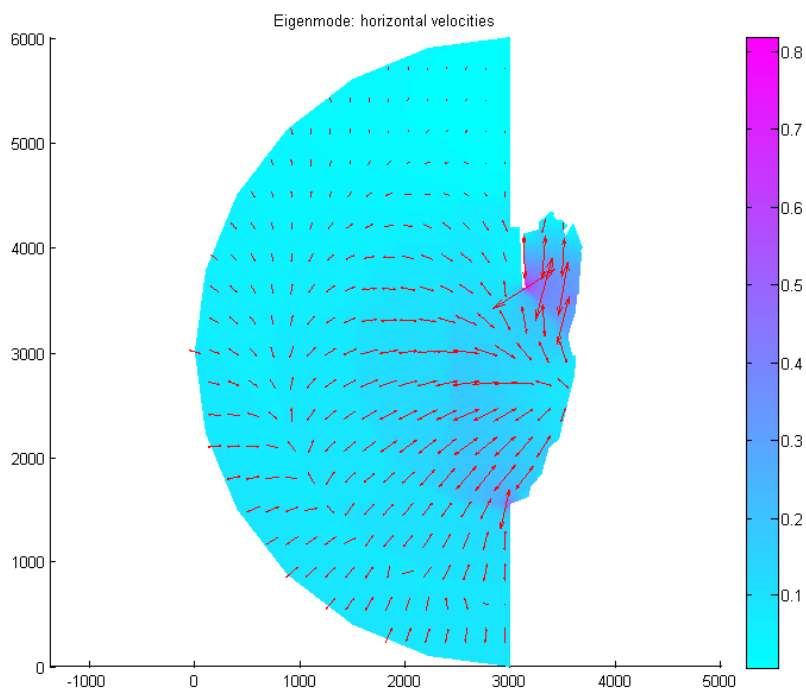


Figura 4.34 - Porto da Baleeira. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=270$  seg

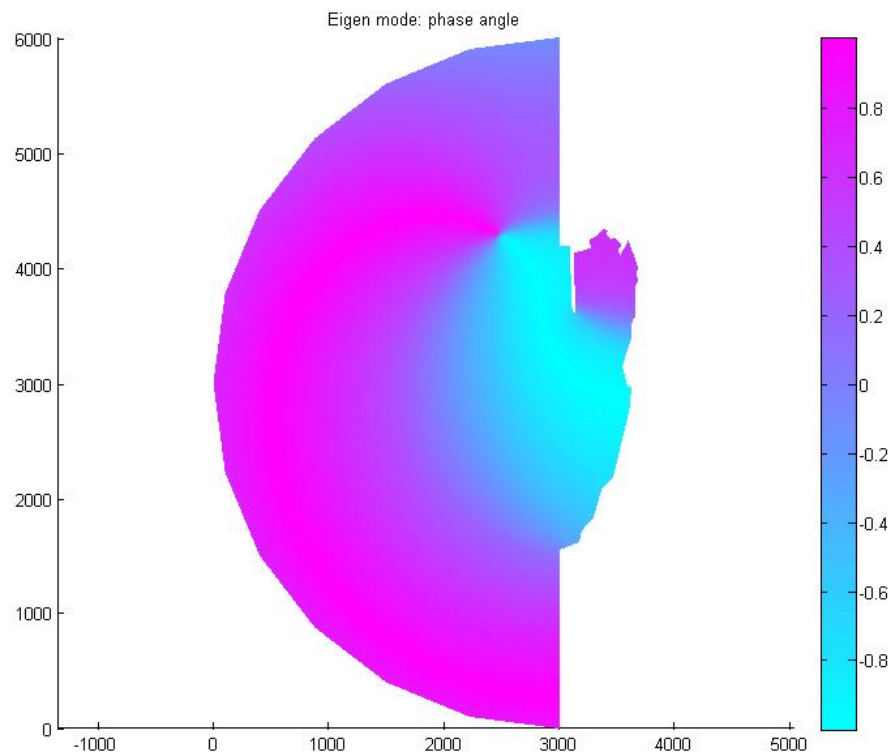


Figura 4.35 - Porto da Baleeira. Ângulo de fase para o período  $T=270$  seg

Da comparação dos dois modelos, verifica-se que o andamento da elevação da superfície livre é praticamente idêntico tanto no exterior da bacia como no interior e o andamento dos vetores de velocidades e dos movimentos horizontais, no interior da bacia, têm aproximadamente as mesmas direções nos dois modelos verificando-se movimentos importantes na entrada e no interior do porto. No entanto, o valor máximo do coeficiente de amplificação verificado por Fortes (1993) (ver Figura 4.31) atinge 7.5 enquanto no modelo PDE\_Berkhoff atinge valores mais reduzidos na ordem dos 5.5.

Os dois modelos conduziram a situações de ressonância para o período testado sendo que o modelo de Fortes (1993) apresentou valores de coeficientes de amplificação no interior do porto mais elevados. Esta diferença de valores poderá dever-se à utilização de domínios de cálculo diferentes tanto quanto à extensão dos domínios considerados como à resolução da malha utilizada e profundidades.

#### 4.3.2. PORTO DE ST. QUAY-PORTRIEUX

##### CARACTERIZAÇÃO

O Porto de St. Quay-Portrieux situa-se no Norte de França e é utilizado para pesca e prática de recreio. É composto atualmente por duas bacias, uma antiga para pesca e recreio protegida por um pequeno quebramar e uma ampliação com dois braços de quebramar que constituem uma marina. A batimetria dos fundos caracteriza-se por profundidades compreendidas entre 3 m e 12 m com inclinações suaves.



Figura 4.36 - Porto de St. Quay-Portrieux (Fonte: marinas.com)

À semelhança da análise feita para o Porto da Baleeira, primeiramente será feita uma análise geral das condições de ressonância do porto através as curvas de resposta da bacia (coeficiente de amplificação  $R$  versus  $kl$ ) para cinco diferentes pontos (três no porto antigo e dois na marina) nas bacias de St. Quay-Portrieux e a identificação dos períodos próprios ressonantes através da resolução do problema de valores próprios. De seguida far-se-á uma análise comparativa dos estados de agitação para períodos ressonantes e das velocidades dos movimentos horizontais registados, tomando por base os resultados do modelo numérico utilizado por Fortes (1993).

Para os estudos de ressonância, a bacia de St. Quay-Portrieux foi inserida numa linha de costa retilínea e a onda progressiva incidente é perpendicular a essa linha de costa sendo que se lhe sobrepõe uma onda refletida na costa, supondo profundidade constante. Para o domínio considerado foram constituídas 7 plataformas de profundidade constante variando entre 3.5 m no interior da bacia antiga e 30 m ao largo.

O domínio foi discretizado por uma malha de elementos finitos gerada pelo programa Triangle contendo 13177 elementos triangulares e 6755 nós. Foram utilizadas diferentes resoluções em função das zonas de diferentes profundidades sendo mais definida para menores profundidades e menos definida para maiores profundidades. A Figura 4.37 apresenta o domínio e fronteiras consideradas para o Porto de St. Quay-Portrieux assim como as zonas de diferentes profundidades.

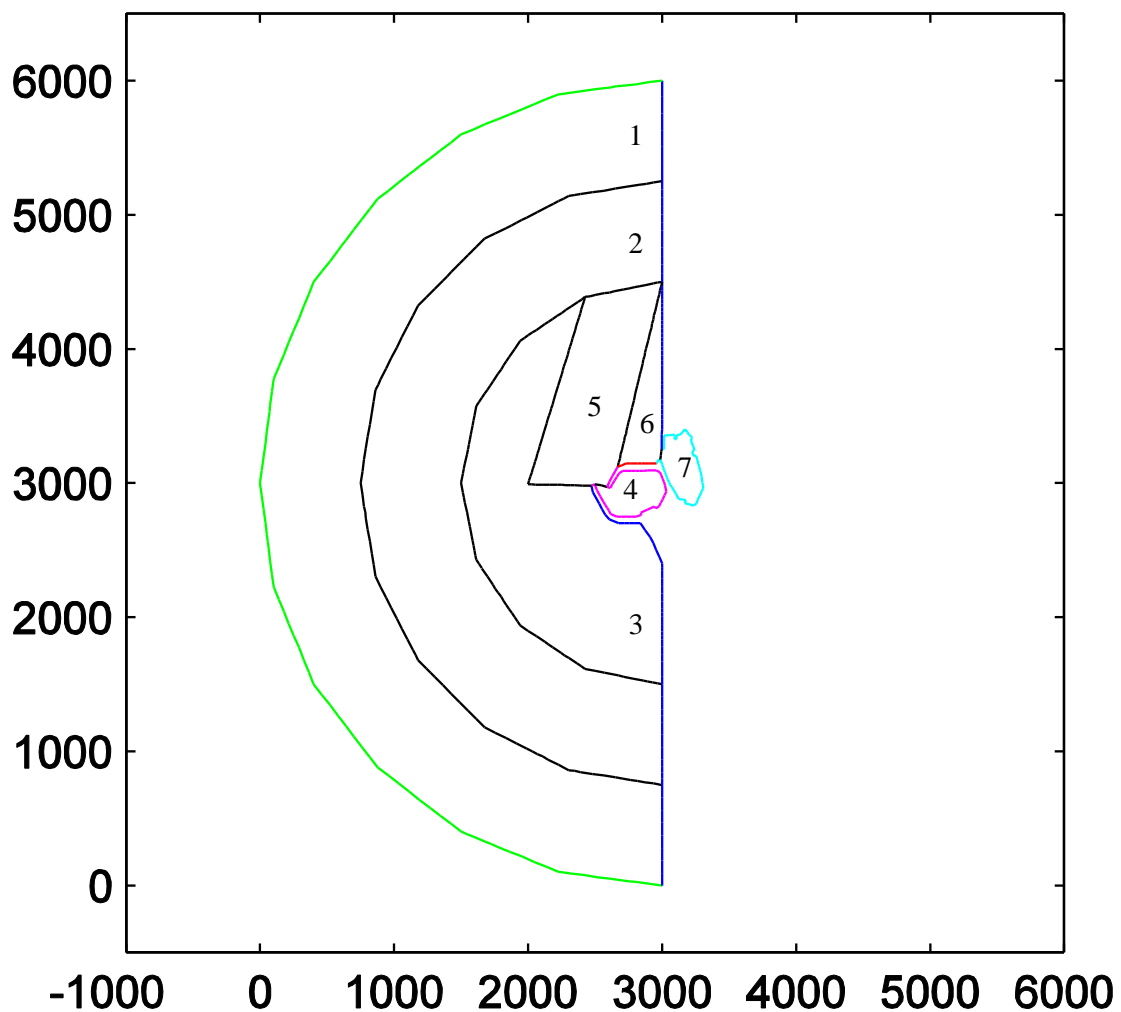


Figura 4.37 - Porto de St. Quay-Portrieux. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE\_Berkhoff

A linha de fronteira representada a cor verde corresponde a um semicírculo de 3000 m de raio na qual é imposta a condição de fronteira de radiação ou de geração-radiação. As restantes linhas de cor representam as diferentes fronteiras no contorno da linha de costa nas quais foram impostas condições de reflexão total.

No modelo PDE\_Berkhoff, para este porto, foram testadas ondas com períodos compreendidos entre 45 e 9000 s pelo que o comprimento de onda para a onda mais curta corresponde a aproximadamente 630 m à profundidade de 20 m. As profundidades das zonas, abertura da malha e o número de pontos por comprimento de onda (para a onda mais curta) estão representados na Tabela 4.6.



Tabela 4.6 - Porto de St Quay-Portrieux. Identificação e resolução das zonas

Zona	Profundidade (m)	$\Delta x \approx \Delta y$ (m)	$L/\Delta x \approx L/\Delta y$ (mínimo)
1	30	62	10
2	20	58	11
3	10	48	13
4	9.5	34	19
5	8	43	15
6	5	37	17
7	3.5	26	24

Os pontos escolhidos para representar as curvas de resposta da bacia do Porto de St. Quay-Portrieux e a correspondente malha de elementos finitos estão representados na Figura 4.38.

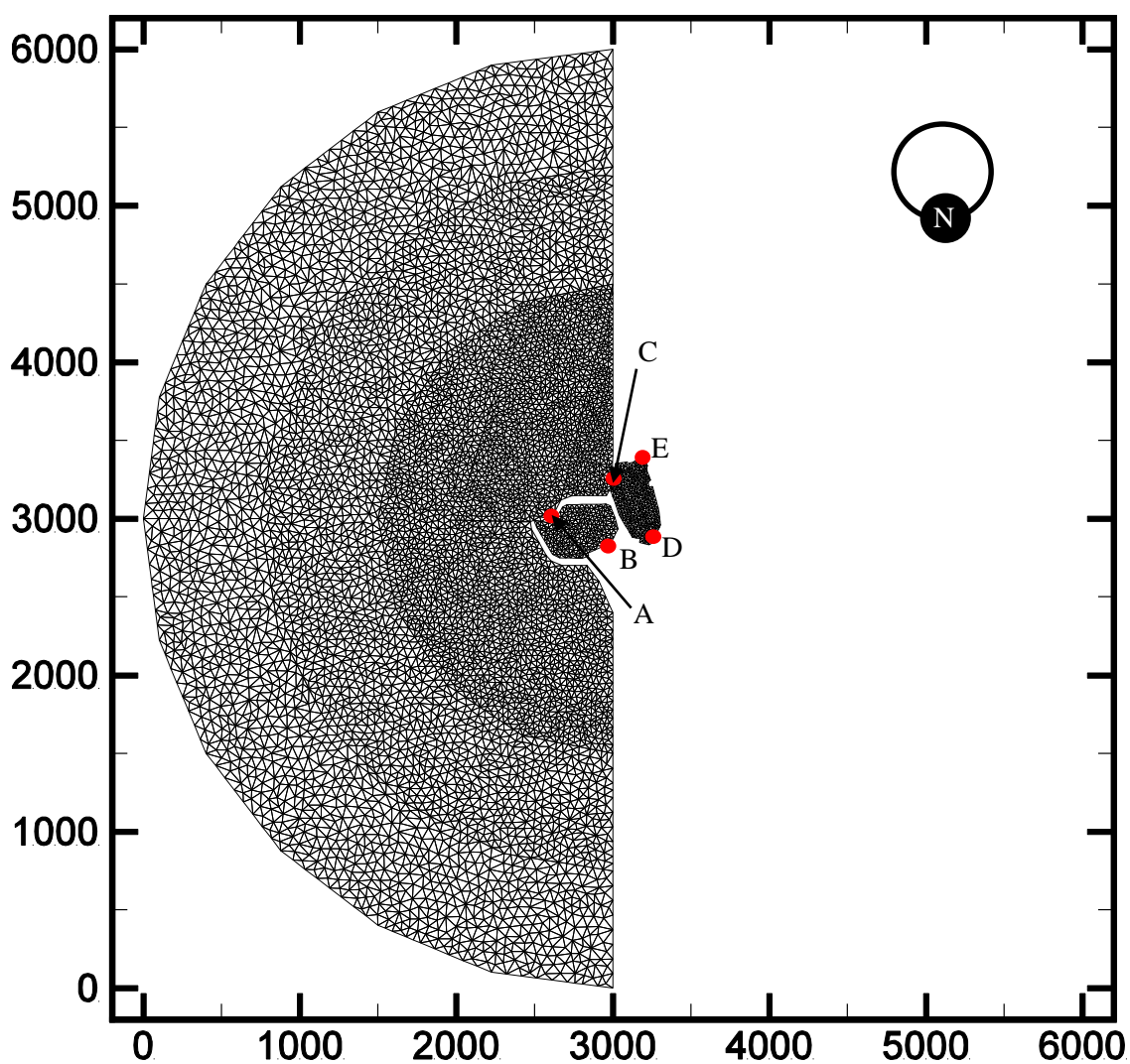


Figura 4.38 - Porto de St. Quay-Portrieux. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta



No estudo de ondas de longo período, o espaçamento da malha, em geral, não oferece grandes dificuldades na discretização do domínio. Na Tabela 4.6 revela que existem pelo menos 10 pontos por cada comprimento de onda e, dado que esse número é encontrado para uma onda cujo período é o menor do intervalo considerado para cálculo, o número de pontos será sempre igual ou superior. É importante ressaltar que o espaçamento da malha deve representar o mais corretamente possível a geometria do domínio pois as condições ressonantes nas zonas interiores e zonas abrigadas irão depender exclusivamente dessa geometria. A zona 7 corresponde à zona mais interior do porto e apresenta um número mínimo de pontos por comprimento de onda igual a 24 pelo que se considera uma resolução suficientemente grande para representar corretamente essa zona.

### OSCILAÇÕES FORÇADAS

As curvas de resposta são obtidas para valores de  $kl$  entre 0 e 3 para o porto antigo e entre 0 e 5 para a marina correspondendo a períodos compreendidos entre 45 e 9000 s. O valor de  $l$  adotado foi de 300 m e 500 m correspondendo ao valor aproximado do comprimento da bacia antiga e da marina, respetivamente. Os valores de  $k$  foram calculados para uma profundidade de 20 m usando a relação dispersão para onde pouco profundas. A onda incidente é uma onda estacionária de amplitude unitária com direção perpendicular à linha de costa retilínea.

As curvas de resposta para os pontos A, B, C, D e E estão representadas nas Figura 4.38 a 4.38 e são referidas a uma amplitude de referência unitária.

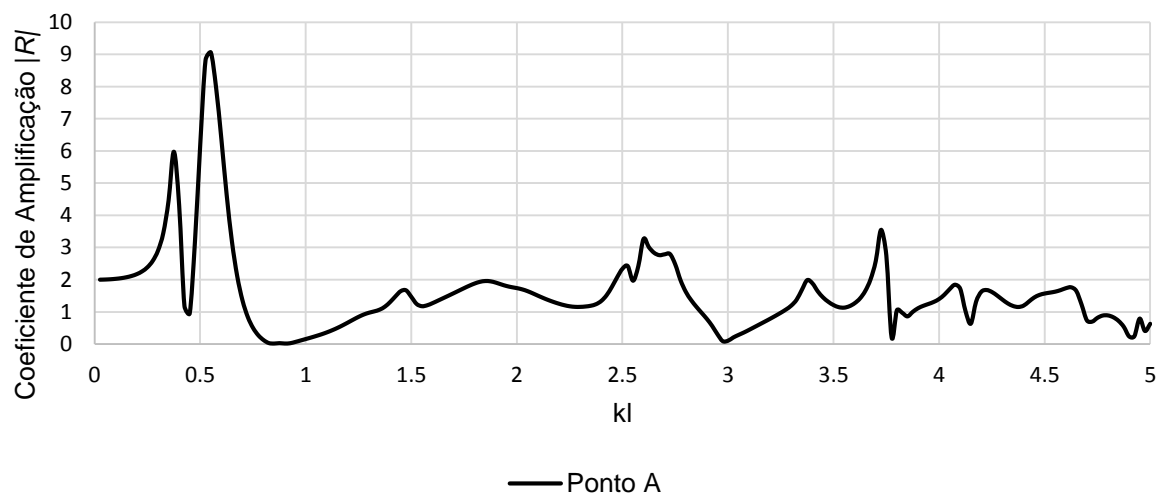


Figura 4.39 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto A (marina)

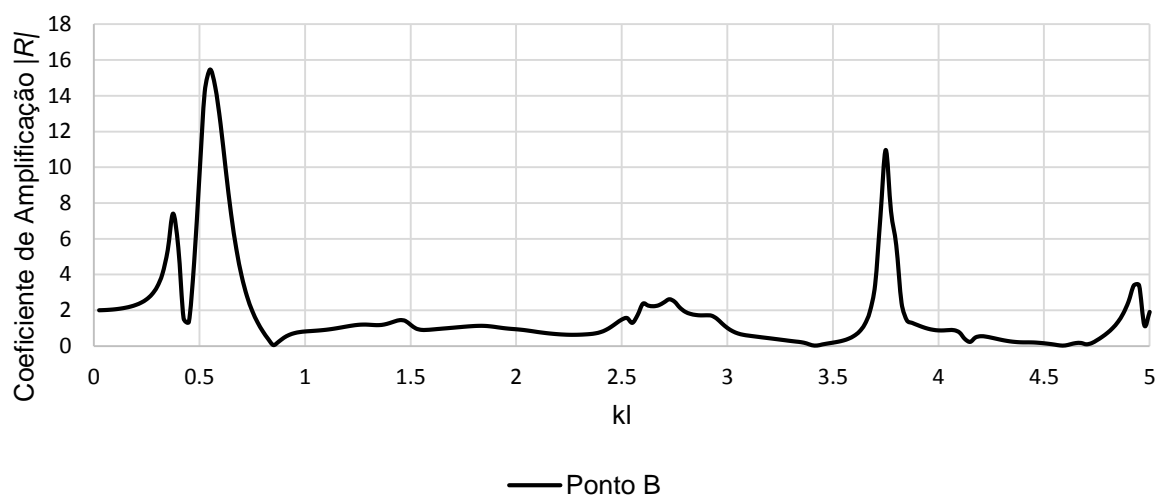


Figura 4.40 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto B (marina)

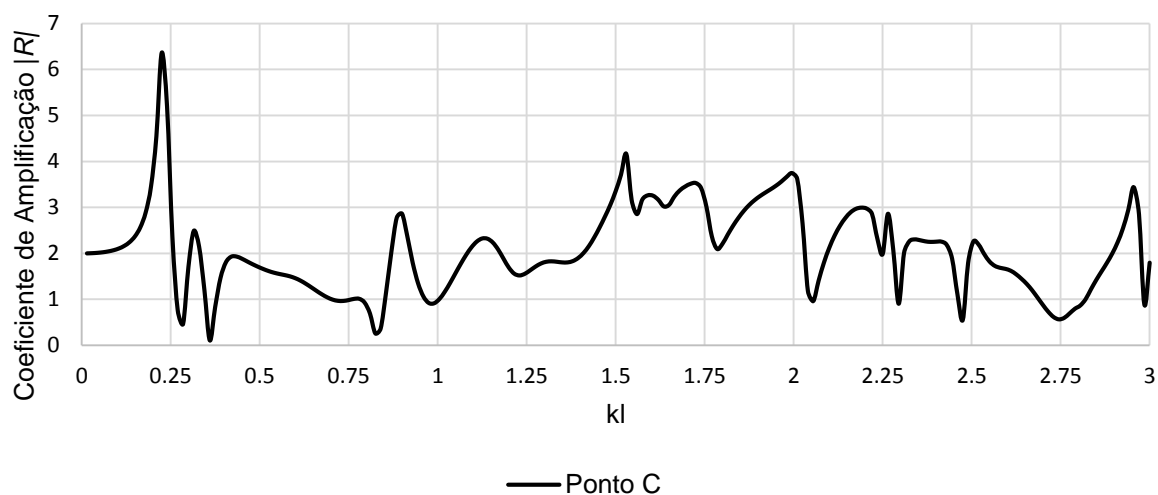


Figura 4.41 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto C (porto antigo)

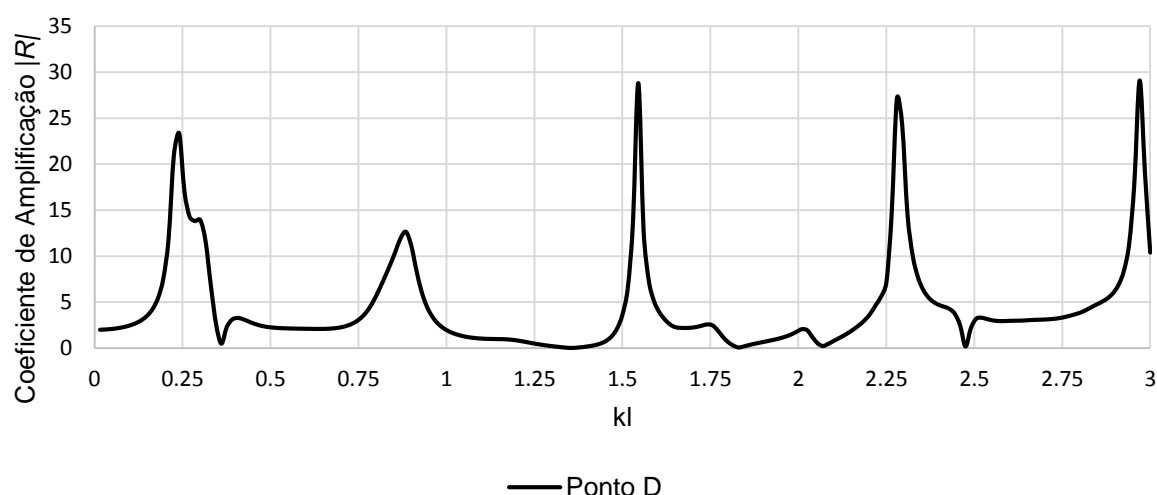


Figura 4.42 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto D (porto antigo)

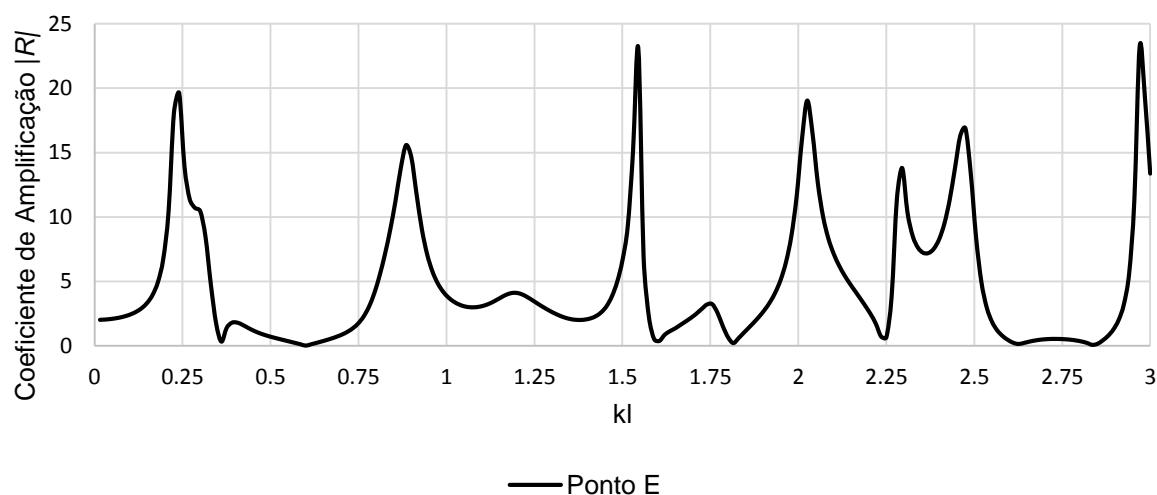


Figura 4.43 - Porto da St. Quay-Portrieux. Curva de resposta para o ponto E (porto antigo)

Da análise das curvas verifica-se um andamento semelhante das duas curvas da marina e das três pertencentes ao porto antigo. Na marina, os picos ressonantes das duas primeiras harmónicas nas duas zonas consideradas coincidem nos mesmos valores de  $kl$  sendo, naturalmente, mais elevados no ponto B situado numa zona interior do porto. Os valores máximos do coeficiente de amplificação para o modo fundamental e para o segundo modo para o ponto B atingem 7.41 e 15.46 para valores de  $kl$  iguais a 0.375 e 0.55, respetivamente.

No porto antigo, a curva do ponto C, que representa a entrada do porto, é a que apresenta uma maior quantidade de picos ressonantes ainda que de menor magnitude quando comparadas com as curvas representativas das outras duas zonas do porto. As curvas dessas duas zonas apresentam um andamento semelhante com picos bem destacados e coincidentes no valor de  $kl$ . A zona Sul correspondente ao ponto E apresenta dois modos ressonantes em valores de  $kl$  entre 2.25 e 2.5 não existentes na zona Norte, ponto D. À entrada do porto, o valor do coeficiente de amplificação  $|R|$  máximo ocorre para o modo fundamental com um valor de 6.36 para  $kl$  igual a 0.225. Nos pontos D e E, o máximo ocorrem em  $kl$

igual a 4.95 atingindo valores de 29.11 e 23.23, respetivamente. É possível adivinhar um comportamento ressonante para períodos inferiores aos testados.

Os valores de alguns coeficientes de amplificação significativos e os respetivos períodos encontram-se apresentados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 - Porto de St. Quay-Portrieux. Valores dos coeficientes de amplificação  $|R|$  em diferentes zonas do porto

T (s)	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto E
560.71	4.31	5.50	5.19	23.37	19.62
448.57	6.2	9.49	1.7	13.94	10.45
407.79	9.07	15.46	2.15	6.85	4.78
152.06	1.67	1.41	2.77	12.65	15.58
87.10	2.42	1.73	3.16	28.83	23.11
66.45	1.99	0.15	2.65	1.95	19.04
45.31	0.79	3.39	2.85	29.11	23.23

## OSCILAÇÕES LIVRES

A resolução do problema de valores próprios para um período mínimo de 45 s permitiu encontrar 98 períodos próprios para o porto de St. Quay-Portrieux. Optou-se por considerar apenas os 25 primeiros modos de oscilação correspondendo ao período mínimo de 100 s. Os primeiros 4 modos de oscilação encontrados pela resolução do problema de valores próprios estão apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 - Porto de St. Quay-Portrieux. Modos de oscilação

Modo	T (s)	kl (300 m)	kl (500 m)
1	568.1	0.235	0.395
2	438.7	0.308	0.513
3	409.7	0.328	0.545
4	311.8	0.431	0.720

Os diagramas da distribuição dos valores de  $|R|$  e os correspondentes diagramas da distribuição de velocidades horizontais para o primeiro e segundo modo de oscilação e para os períodos  $T = 152$  s e  $T = 45.3$  s, que conduziram a elevados valores de coeficiente de amplificação, estão apresentados nas Figura 4.44 a 4.51.

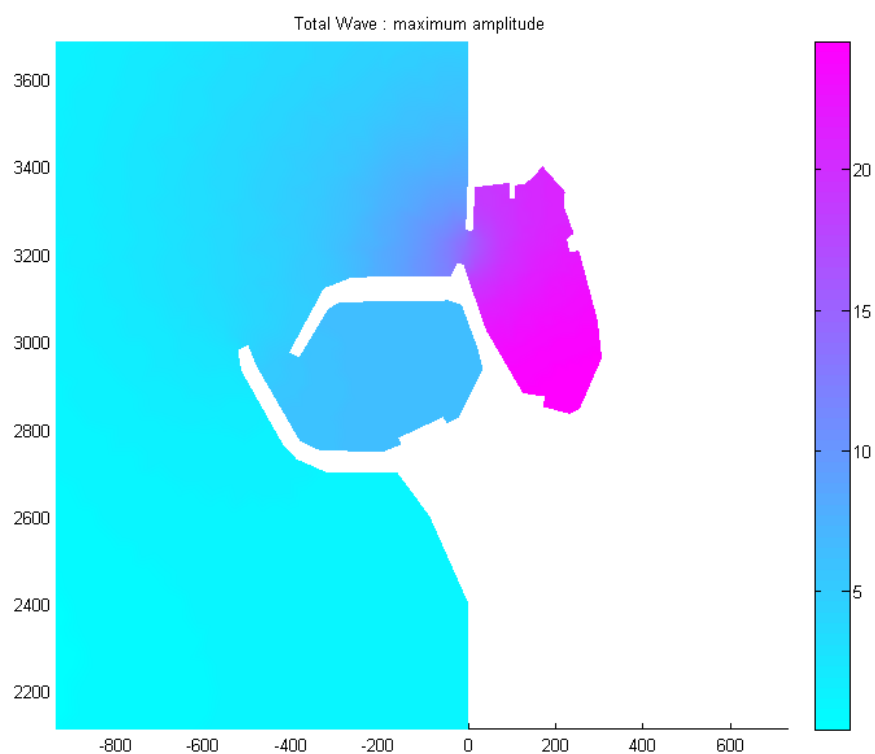


Figura 4.44 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=568.7$  s (modo fundamental do porto antigo)

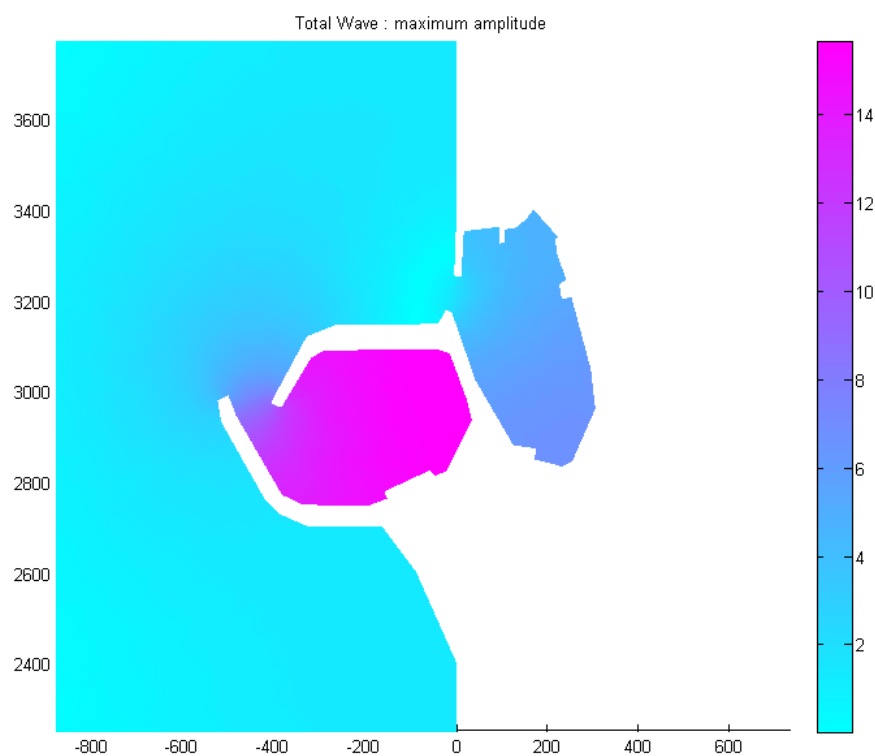


Figura 4.45 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=407.79$  s (modo fundamental da marina)

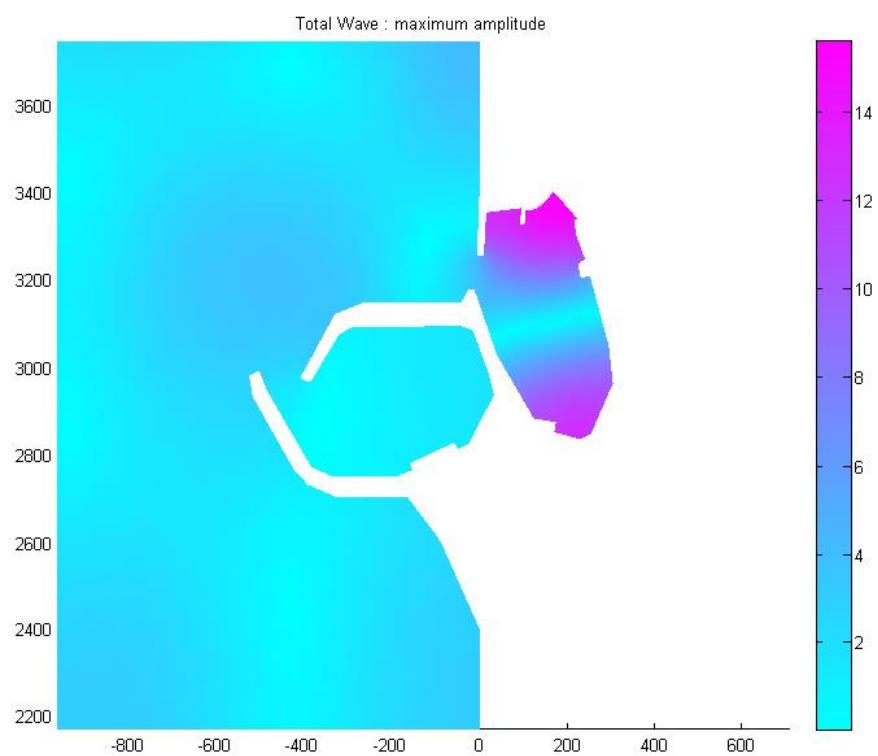


Figura 4.46 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=152.06$  s

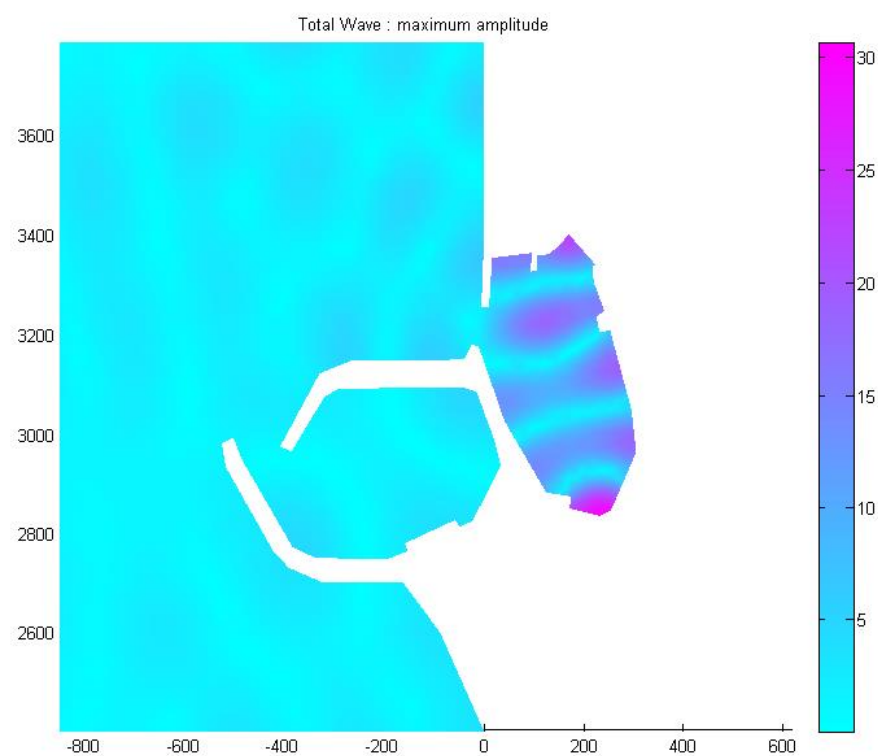


Figura 4.47 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=45.31$  s

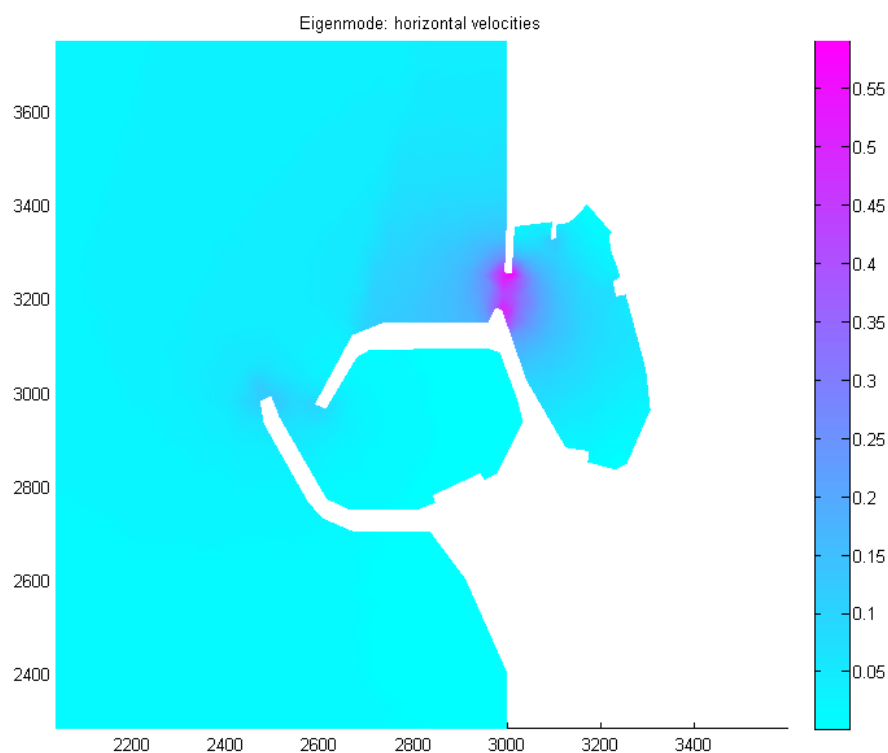


Figura 4.48 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=568.7$  s (modo fundamental do porto antigo)

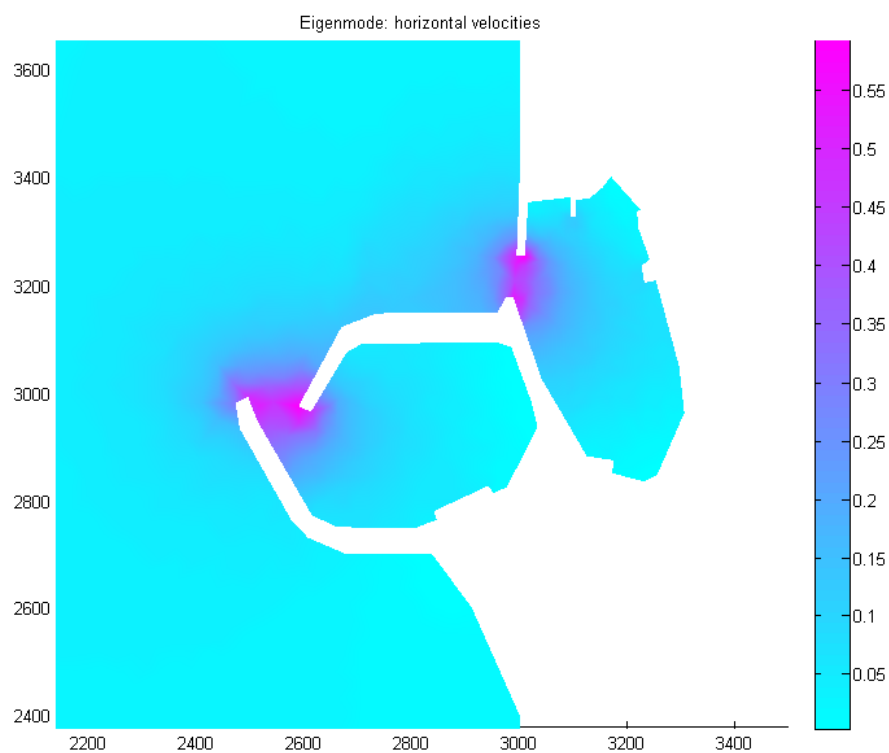


Figura 4.49 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=407.79$  s (modo fundamental da marina)

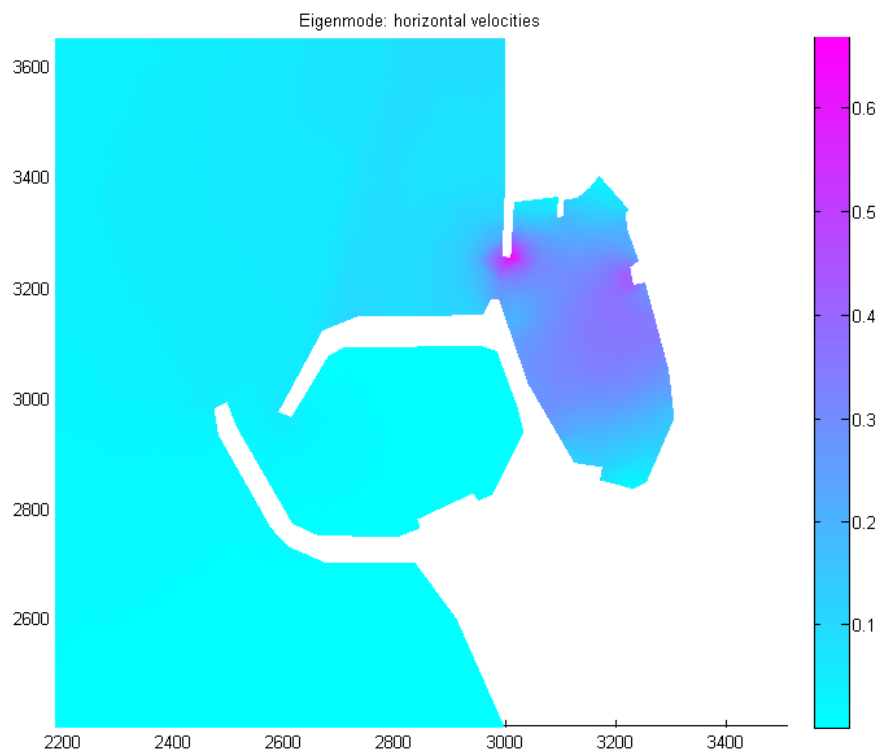


Figura 4.50 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=152.06$  s

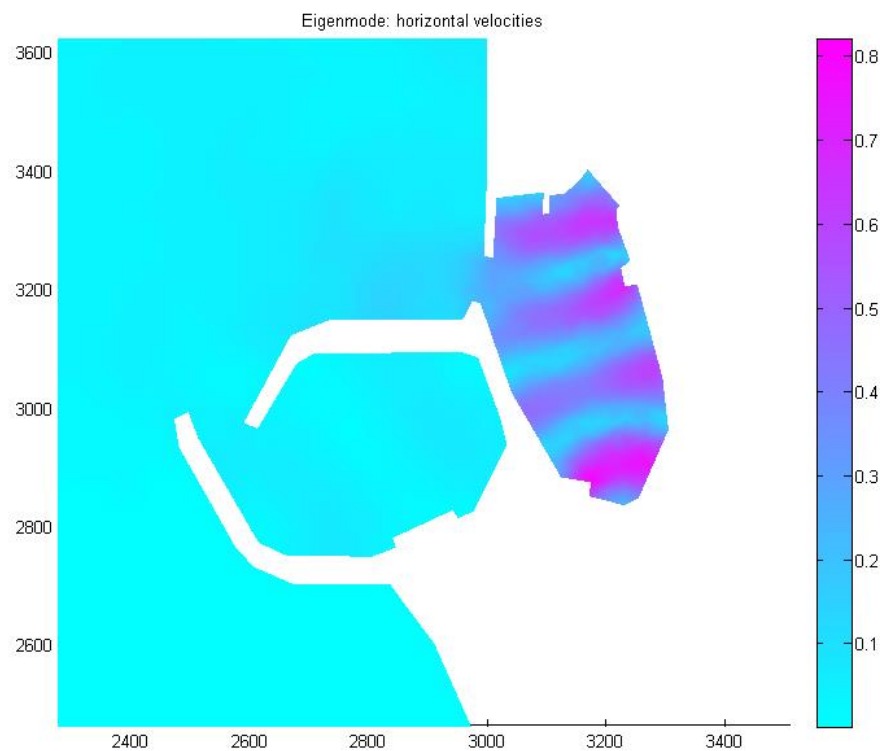


Figura 4.51 - Porto De St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=45.31$  s



Os resultados obtidos verificam a existência de fenómenos de ressonância do interior do porto e velocidades de movimentos horizontais significativas para os períodos demonstrados. No interior da bacia do porto novo, os valores dos coeficientes de amplificação  $|R|$  mais significativos variam entre 9 e 21.5 enquanto no porto antigo os valores variam entre 15 e 29.

Nas mesmas condições de fronteira (geração-radiação nos limites exterior do domínio e reflexão total nas fronteiras fixas) mas para uma direção de propagação incidente igual a N-10°-E, os resultados para um período igual a 400 s e uma onda de amplitude unitária do modelo aplicado por Fortes (1993) estão a seguir representados sob a forma de diagrama de agitação e diagrama de movimentos horizontais.

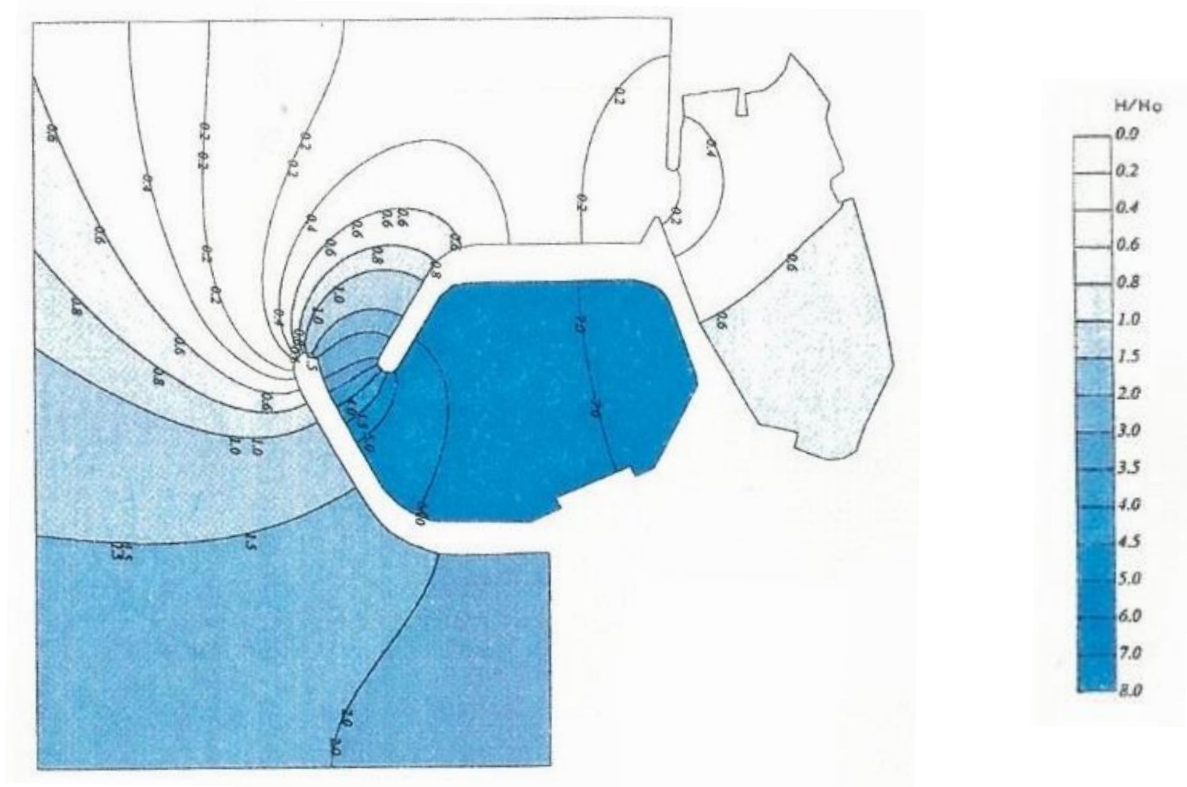


Figura 4.52 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=400$  s (Adaptado de Fortes, 1993)

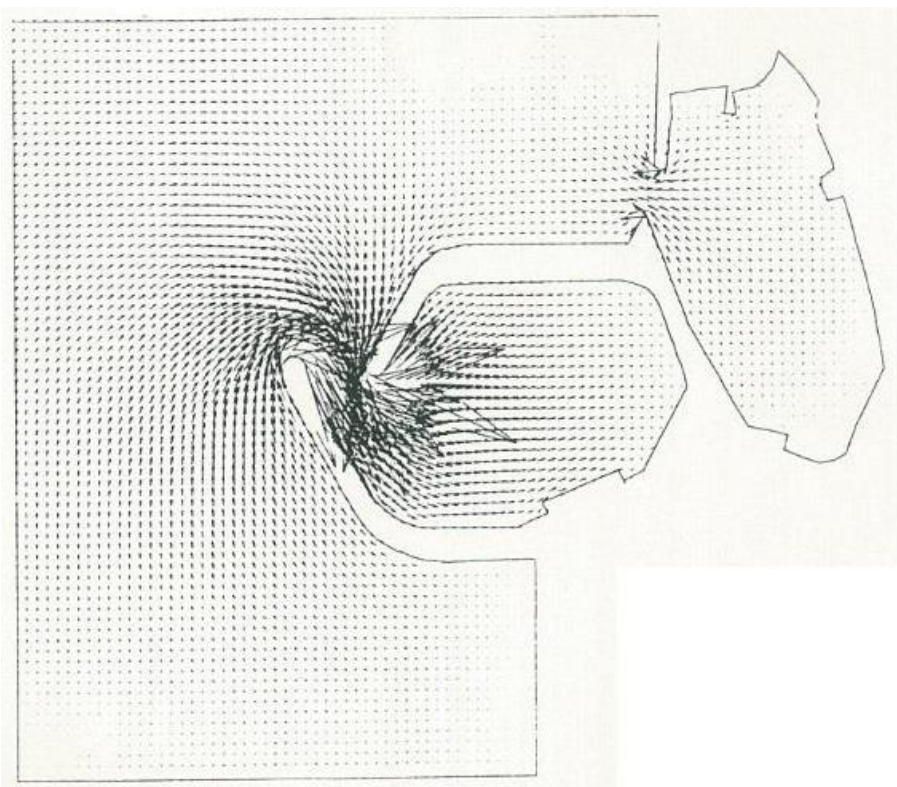


Figura 4.53 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama dos movimentos horizontais para o período  $T=400$  s  
(Adaptado de Fortes 1993)

Os resultados para um período de 400 s obtidos pelo modelo PDE\_Berkhoff estão apresentados nas Figura 4.54 e 4.50 e constam do diagrama dos coeficientes de amplificação e do diagrama de velocidades horizontais normalizadas.

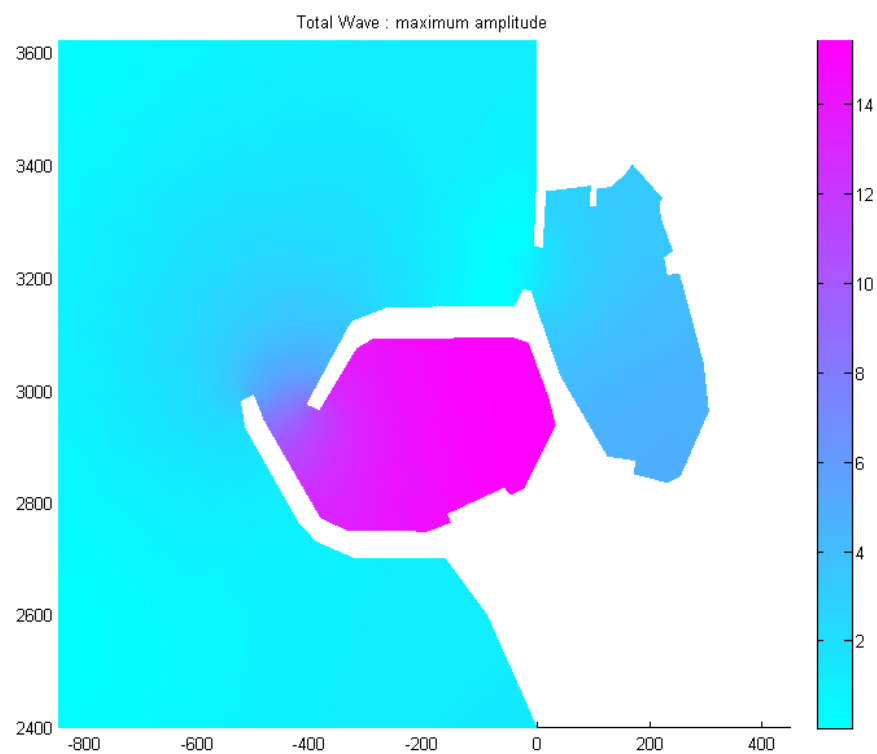


Figura 4.54 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de agitação para o período  $T=400$  s

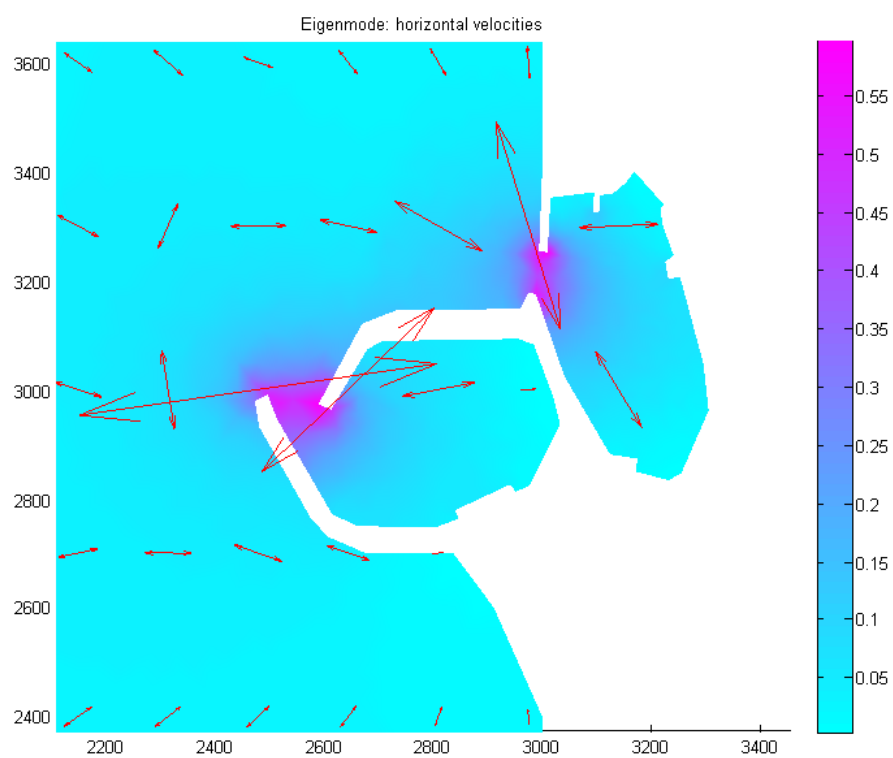


Figura 4.55 - Porto de St. Quay-Portrieux. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=400$  s

Da comparação dos dois modelos, verifica-se que o andamento da elevação da superfície livre é praticamente semelhante tanto no exterior como no interior da bacia do porto novo e antigo e o andamento dos vetores de velocidades e dos movimentos horizontais, no interior da bacia, têm aproximadamente as mesmas direções nos dois modelos verificando-se movimentos importantes na entrada das duas bacias. No entanto, o valor máximo do coeficiente de amplificação na Figura 4.52 atinge 7.5 enquanto no modelo PDE\_Berkhoff atinge valores na ordem dos 14, i.e. 7 quando referido à amplitude da onda estacionária exterior.

Os dois modelos conduziram a situações de ressonância para o período testado sendo os resultados em termos do coeficiente de amplificação semelhantes.

#### 4.3.3. PORTO DE LEIXÕES

##### CARACTERIZAÇÃO

O Porto de Leixões (Figura 4.56), construído nos finais do século XIX, é o segundo maior porto artificial de Portugal ficando situado nas proximidades da cidade do Porto (enquadrado pelas povoações de Leça da Palmeira a Norte e Matosinhos a Sul) no Norte de Portugal, distando cerca de 4 km da foz do Rio Douro. Foi sucessivamente alargado ao longo dos anos e, hoje, é um porto de fins múltiplos (cais convencionais de carga geral e granéis sólidos, de movimentação de granéis líquidos, terminal de petroleiros, de contentores, multiusos, estação de passageiros, doca de recreio, porto de pesca e instalações especializadas) representando grande percentagem do comércio internacional português. A batimetria dos fundos caracteriza-se por zonas de profundidades entre os 5 m e os 15 m. Um mapa do porto com as diferentes zonas e diferentes profundidades pode ser consultado no Anexo C.



Figura 4.56 - Porto de Leixões (Fonte: culturaldata.wordpress.com)

Para os cálculos de ressonância efetuados pelo modelo numérico para o Porto de Leixões foram constituídas 12 plataformas de profundidade constante com valores entre 50 m (valor máximo ao largo) e 5 m (valor mínimo no interior da bacia). A bacia de Leixões é inserida numa linha de costa retilínea e a direção de propagação da onda progressiva incidente é perpendicular à linha de costa.

A malha de elementos finitos que discretiza o domínio considerado contém 10618 elementos triangulares e 5565 nós. A resolução da malha é definida em função das zonas sendo cada vez mais refinada consoante a diminuição da profundidade. A localização das zonas está apresentada na Figura 4.57, e a sua numeração, bem como as profundidades correspondentes, a largura do elemento e o número mínimo de pontos por comprimento de onda são apresentados na Tabela 4.9.

As linhas de diferentes cores no contorno do domínio (ver Figura 4.57) correspondem a marcadores de fronteira sendo que as cores são meramente representativas do tipo de fronteira que foi considerado. Na fronteira exterior delimitada a verde foi imposta a condição de geração-irradiação ou a condição de irradiação, conforme o tipo de problema a resolver. Como nos estudos de ressonância são tratadas ondas longas, nas restantes fronteiras é imposta a condição de reflexão total.



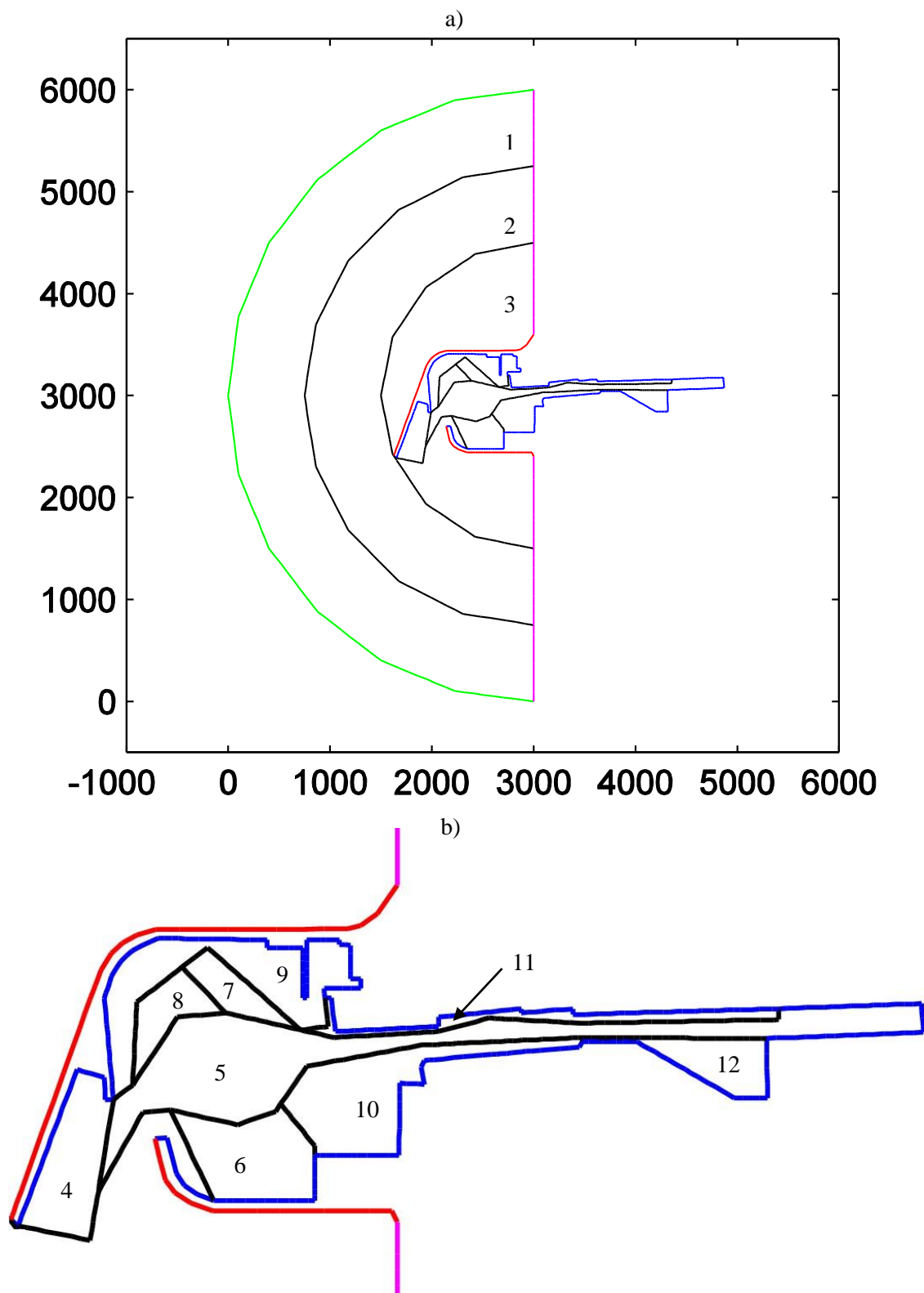


Figura 4.57 – Porto de Leixões. Domínio e localização das zonas de diferentes profundidades utilizadas no modelo PDE\_Berkhoff

A largura de malha utilizada nas zonas interiores é de aproximadamente de 26 m pelo que se considerou suficientemente pequena para que não houvesse distorções na geometria do porto. A utilização de uma

largura de malha grosseira pode conduzir a que haja erros na representação da geometria do domínio que, por sua vez, poderão conduzir a modificações nas condições de ressonância.

Tabela 4.9 – Porto de Leixões. Identificação e resolução das zonas

Zona	Profundidade (m)	$\Delta x \approx \Delta y$ (m)	$L/\Delta x \approx L/\Delta y$ (mínimo)
1	50	102	10
2	40	96	11
3	30	83	12
4	15	34	30
5	12	26	40
6	8.5	26	40
7	6	26	40
8	10	26	40
9	6	26	40
10	10	26	40
11	10	26	40
12	11	26	40

Os valores do número de pontos por comprimento de onda foi calculado para uma onda de período mínimo no intervalo de cálculo considerado. As zonas interiores de menor profundidade apresentam um número de pontos que ronda os 40 por cada comprimento de onda pelo que se garante uma boa resolução de malha nos pontos de interesse.

A malha de elementos finitos considerada para o domínio de cálculo do Porto de Leixões está representada na Figura 4.58.

## OSCILAÇÕES FORÇADAS

Para a obtenção da curva de resposta da bacia de Leixões foram escolhidos cinco pontos distintos da fronteira do domínio correspondendo a zonas importantes do porto e, *a priori*, suscetíveis a efeitos de ressonância (ver Figura 4.58):

- ponto na entrada do porto;
- ponto no terminal multiusos;
- ponto na marina de recreio;
- ponto na ponte móvel;
- ponto no terminal de contentores sul, no extremo direito do domínio.

As curvas de resposta foram calculadas para um valor  $l$  de 3000 m (comprimento aproximado da bacia do Porto de Leixões) com  $k$  calculado para a profundidade de referência de 20 m, recorrendo à relação de dispersão de águas pouco profundas. Foram testados os períodos de onda do intervalo 90 - 9000 s.

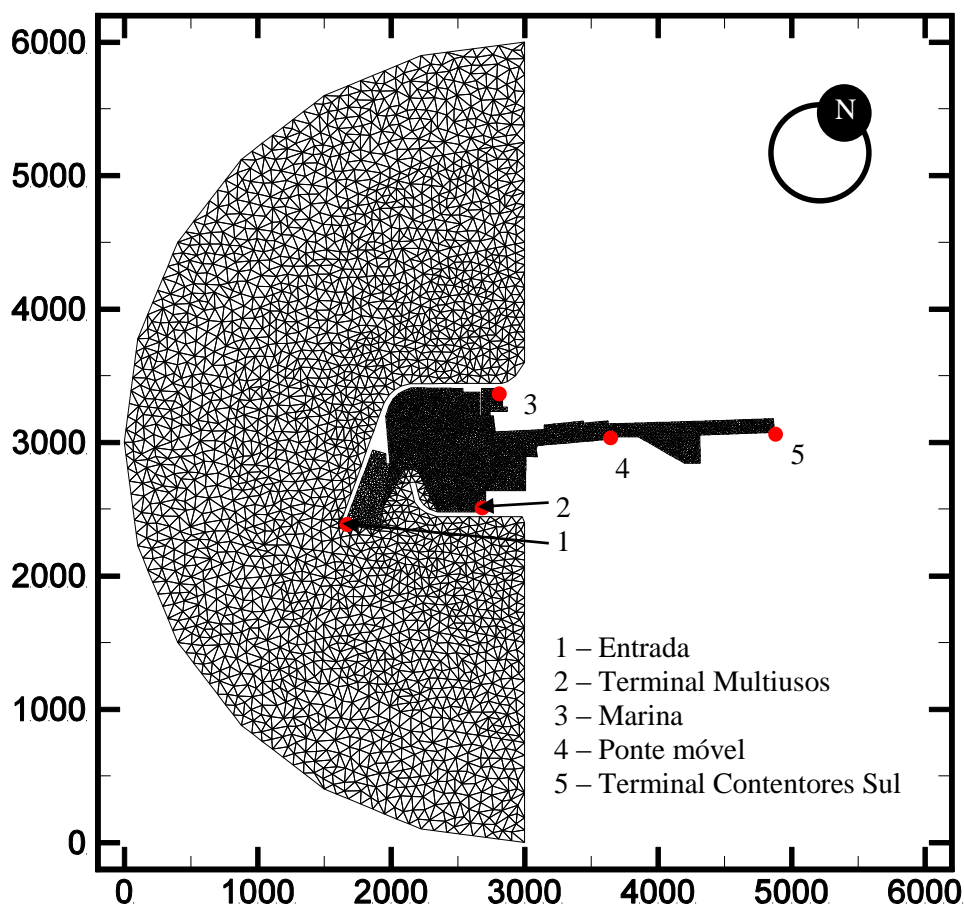


Figura 4.58 – Porto de Leixões. Malha de elementos finitos do domínio de cálculo e pontos considerados para as curvas de resposta

Obtêm-se assim as curvas de resposta para a zona de entrada do porto, Figura 4.59, para o terminal multiusos, Figura 4.60, para a marina, Figura 4.61, para a ponte móvel, Figura 4.62, e para o terminal de contentores sul, Figura 4.63.



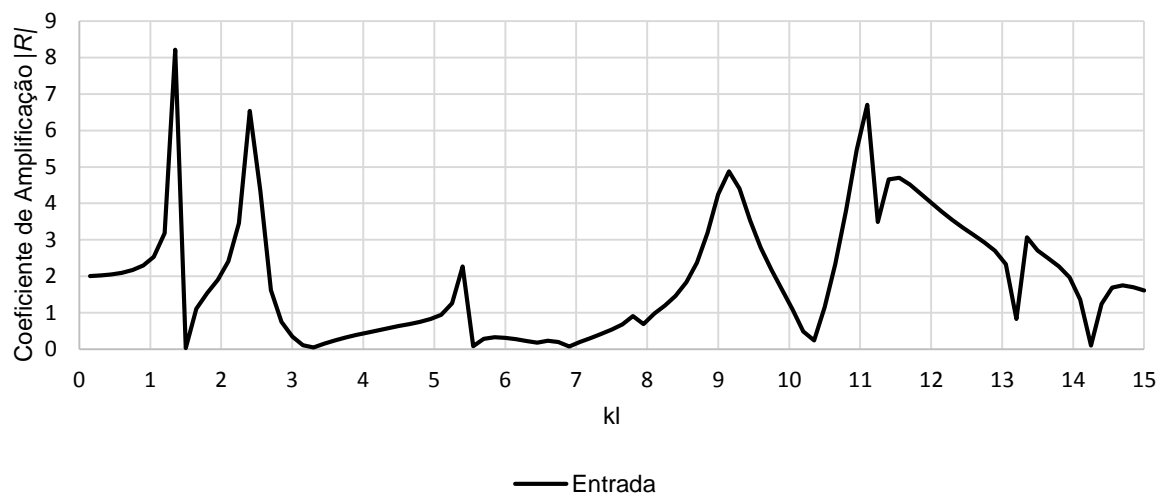


Figura 4.59 – Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na entrada

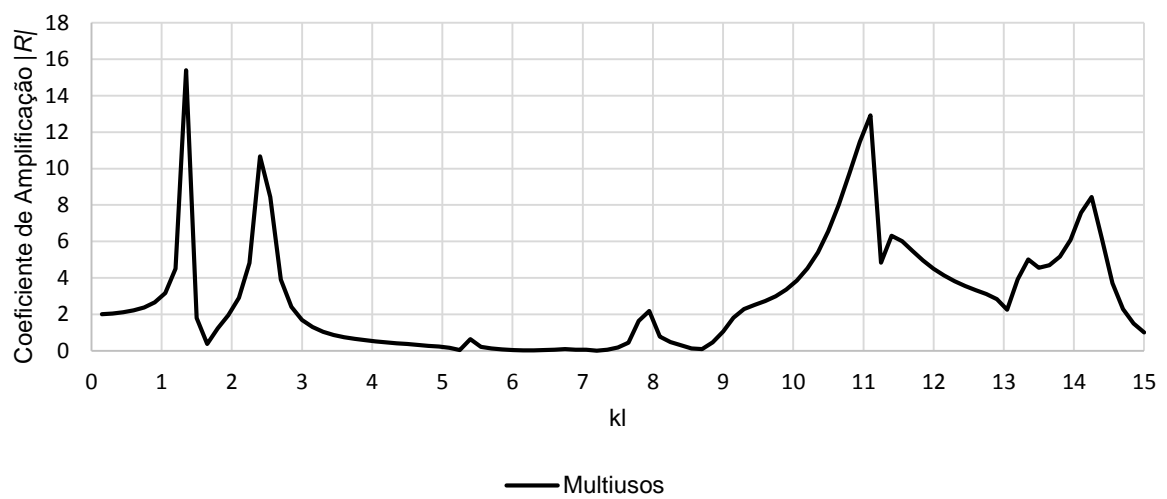


Figura 4.60 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto no terminal multiusos

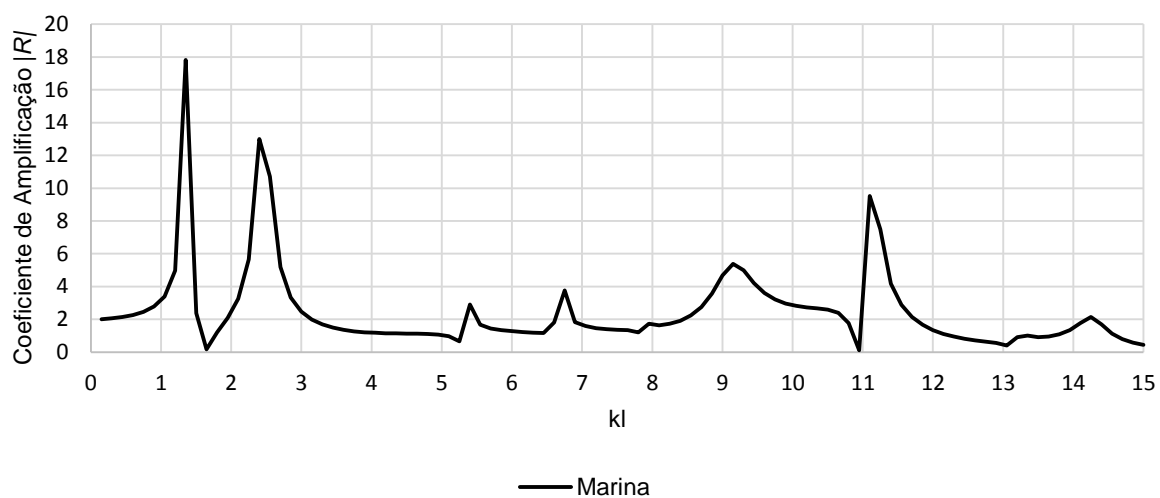


Figura 4.61 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na marina

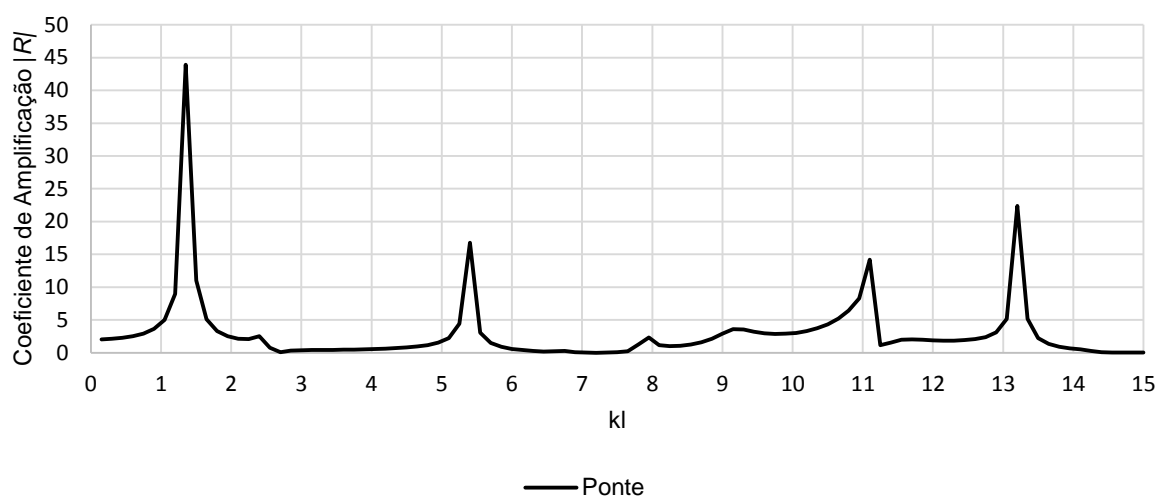


Figura 4.62 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto na ponte móvel

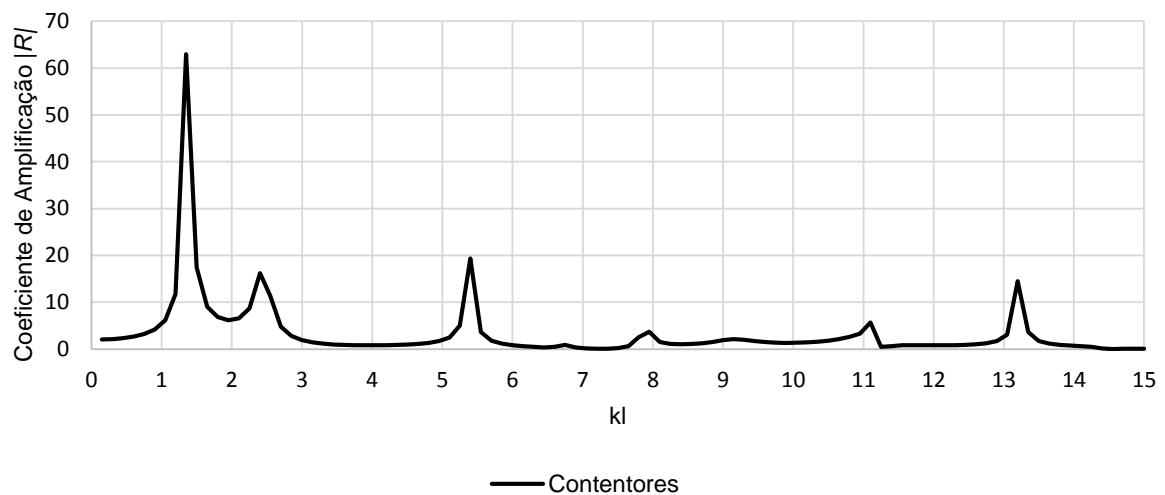


Figura 4.63 - Porto de Leixões. Curva de resposta para um ponto no terminal de contentores sul

A primeira impressão que se pode tirar da comparação entre as cinco curvas apresentadas é a presença do pico ressonante destacado da primeira harmónica em qualquer um dos casos. A primeira harmónica, correspondente ao modo fundamental, é, teoricamente, o modo mais gravoso e apresenta-se aqui bem destacado ocorrendo num período na gama dos 900-1000 s. O máximo valor do coeficiente de amplificação é atingido, naturalmente, no terminal de contentores sul correspondendo ao ponto extremo interior da bacia e toma um valor na ordem de 63. Estes valores estão referidos à onda progressiva incidente. Deverão ser divididos por 2 caso se pretenda referir à onda estacionária exterior.

O segundo modo também é bem perceptível, ainda que menos destacado, em todas as zonas à exceção da zona da ponte móvel. Este modo ocorre para um período entre 550-600 s e atinge o valor máximo de 16.2 no terminal de contentores sul (mesmo ponto que o modo fundamental).

Os restantes modos de oscilação ocorrem para uma gama mais baixa de períodos (100-250 seg). Os picos ressonantes, de uma maneira geral, acontecem todos aproximadamente no mesmo intervalo de períodos para todas as zonas do porto consideradas.

### OSCILAÇÕES LIVRES

A resolução numérica do problema de valores próprios permite a determinação dos períodos ressonantes exatos e dos modos de oscilação associados. Para a bacia do Porto de Leixões foram encontrados 25 modos de oscilação. Excluindo os modos que ocorrem no exterior da bacia, com este processo iterativo obtiveram-se os valores da amplificação para os modos de oscilação referidos na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Porto de Leixões. Modos de oscilação

Modo	T (s)	L (m)	k	kl
1	990.7	13868.1	0.00045	1.36
2	552.7	7736.6	0.00081	2.44
4	250.0	3501.4	0.00179	5.38
6	201.1	2816.5	0.00223	6.69
8	192.4	2694.7	0.00233	7.0
9	146.6	2053.7	0.00306	9.18
13	121.2	1698.2	0.00370	11.1
15	120.9	1691.1	0.00372	11.15
20	101.8	1426.2	0.00441	13.22
23	94.3	1320.4	0.00476	14.28

A Tabela 4.11 apresenta os valores dos coeficientes de amplificação para as diferentes zonas consideradas do porto. As curvas de resposta das zonas consideradas com os períodos próprios ressonantes podem ser consultadas no Anexo C.

Tabela 4.11 – Porto de Leixões. Valores dos coeficientes de amplificação  $|R|$  em diferentes zonas do porto

Modo	T (s)	kl	Entrada	Multiusos	Marina	Ponte	Contentores
1	990.7	1.36	8.94	17.20	20.01	50.49	72.68
2	552.7	2.44	7.42	12.55	15.46	2.48	18.47
4	250.0	5.38	2.96	0.64	2.58	19.33	22.20
6	201.1	6.69	0.64	0.17	7.30	0.68	1.89
8	192.4	7.0	0.17	0.89	3.81	0.38	2.48
9	146.6	9.18	4.86	1.93	5.38	3.61	2.15
13	121.2	11.1	6.71	12.92	9.51	14.16	5.67
20	101.8	13.22	2.46	6.49	1.44	25.53	16.65
23	94.3	14.28	0.22	8.25	2.12	0.25	0.40

Para os modos de oscilação da Tabela 4.10, obtiveram-se os diagramas de agitação e de velocidades normalizadas de movimentos horizontais correspondentes aos modos 1, 2, 4, 13 e 20 (Figura 4.64 a 4.73).

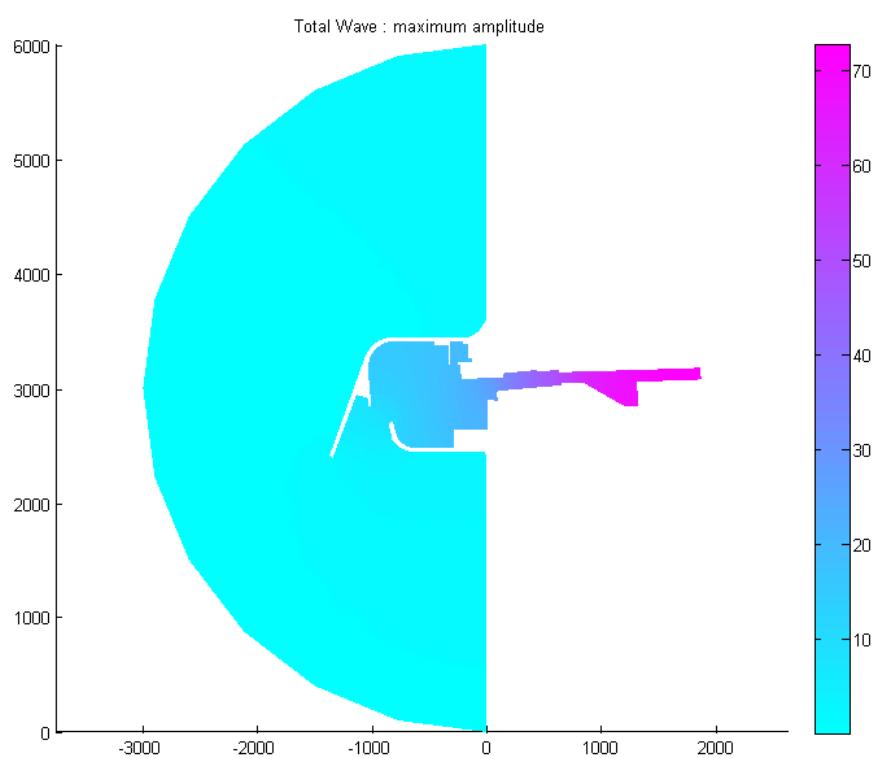


Figura 4.64 – Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período  $T=990.7$  s (modo fundamental)

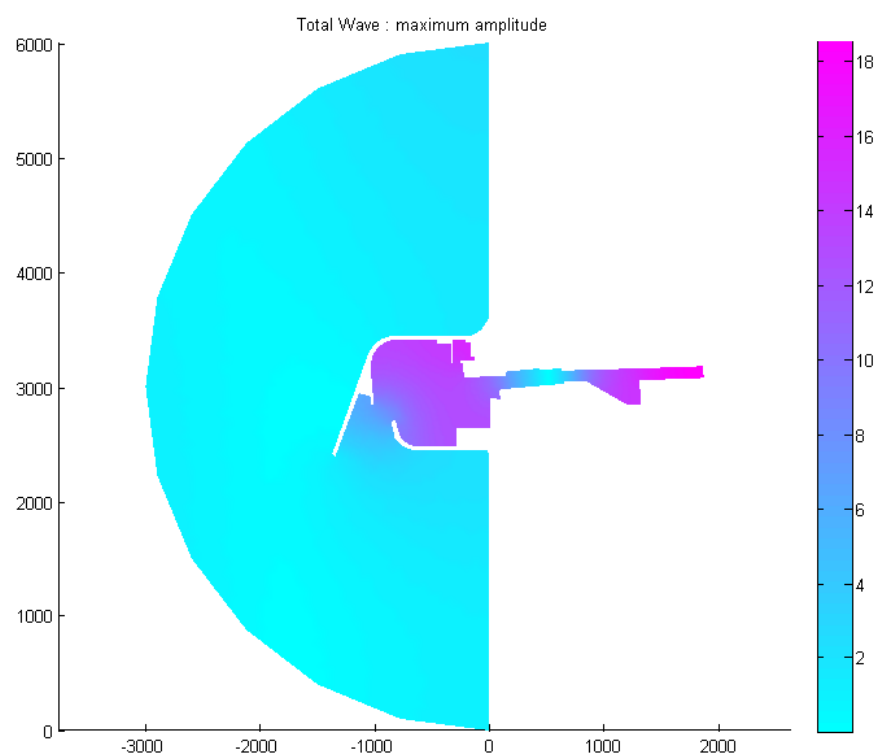


Figura 4.65 – Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período  $T=552.7$  s

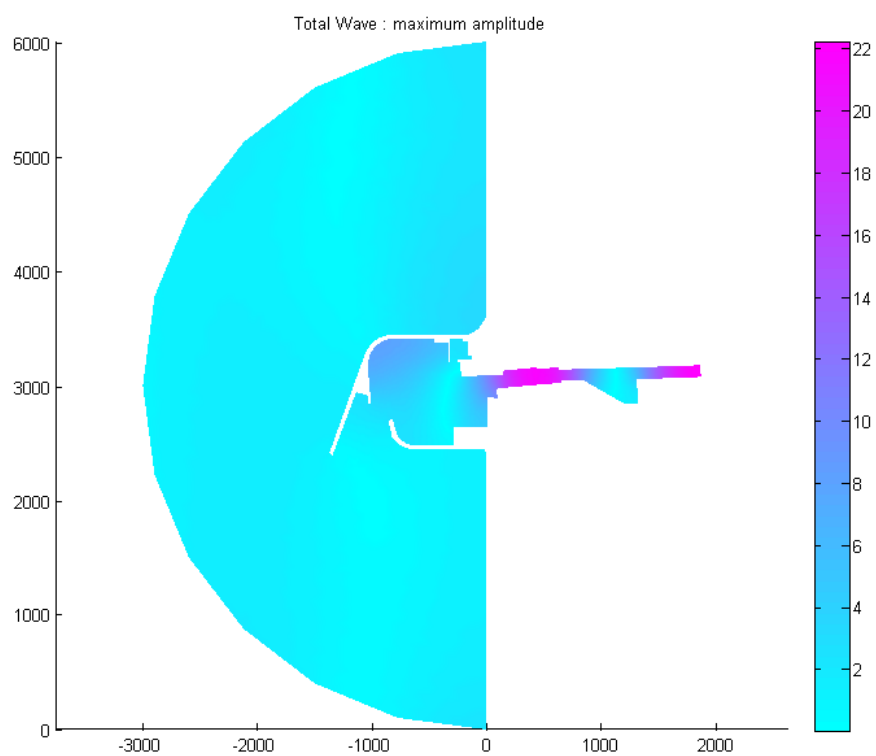


Figura 4.66 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período  $T=250$  s

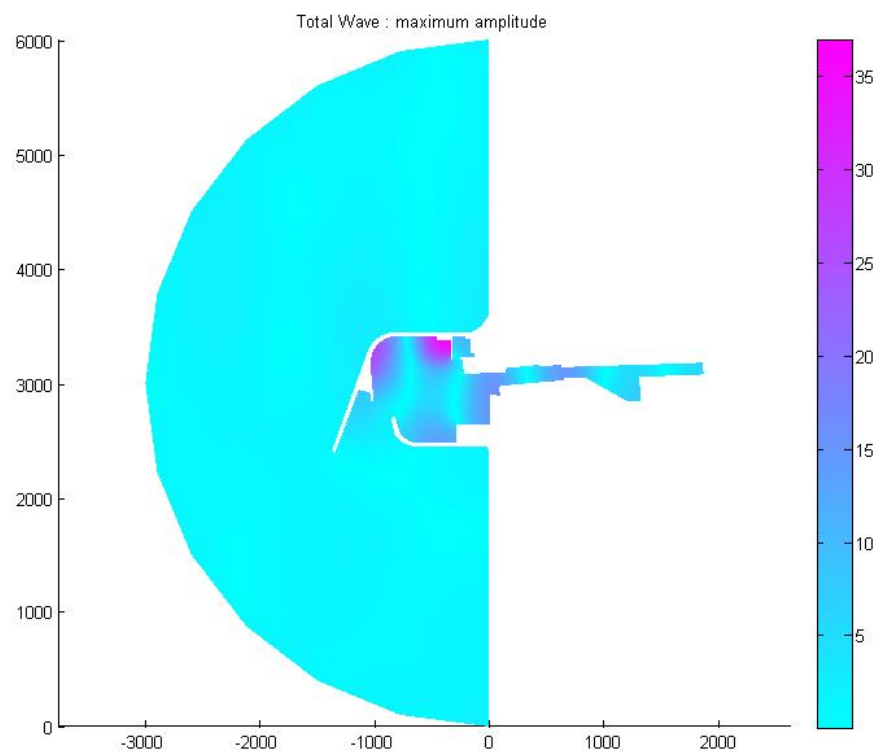
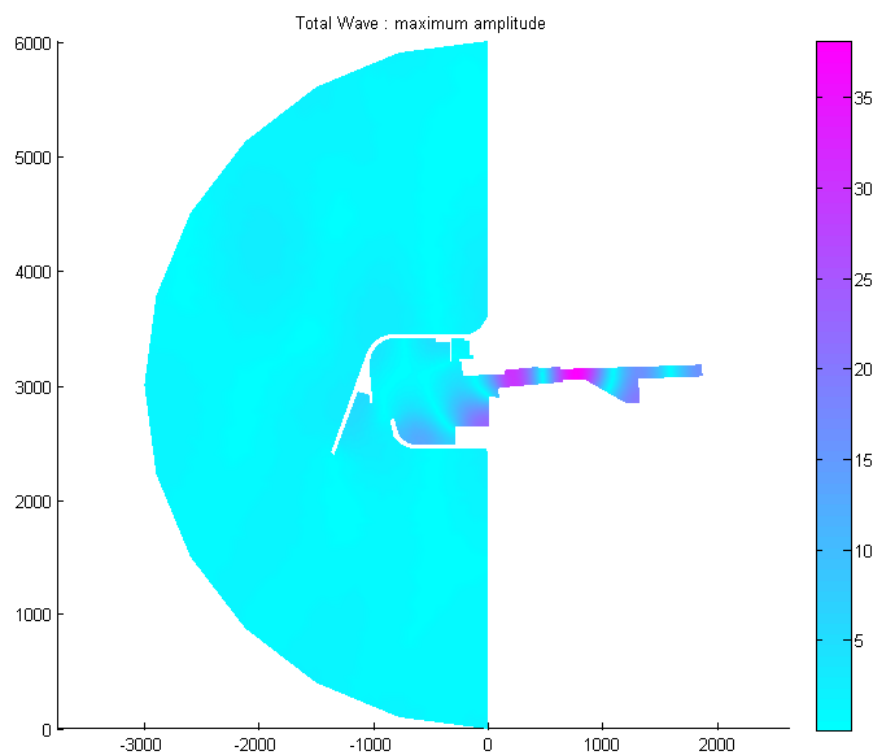
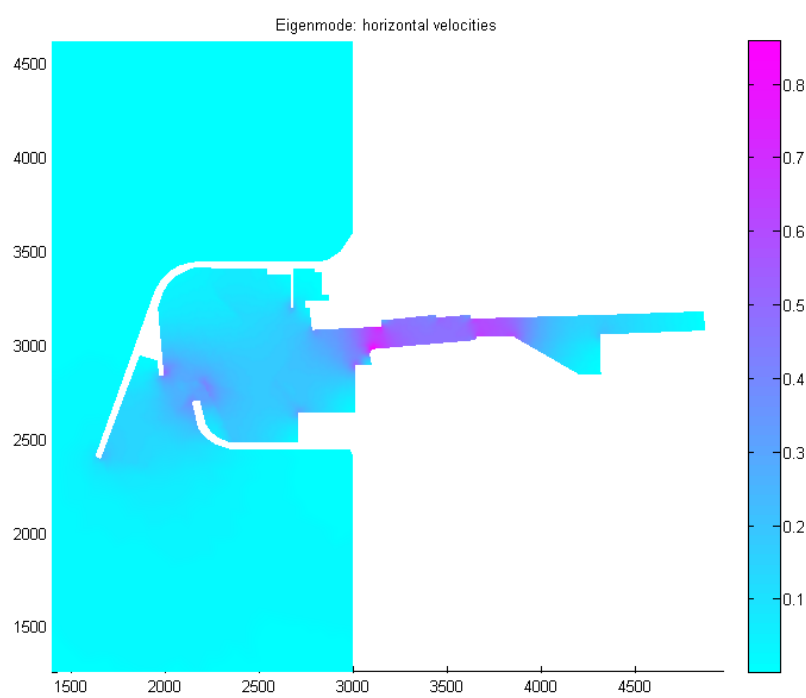


Figura 4.67 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período  $T=121.2$  s

Figura 4.68 - Porto de Leixões. Diagrama de agitação para o período  $T=101.8$  sFigura 4.69 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=990.7$  s

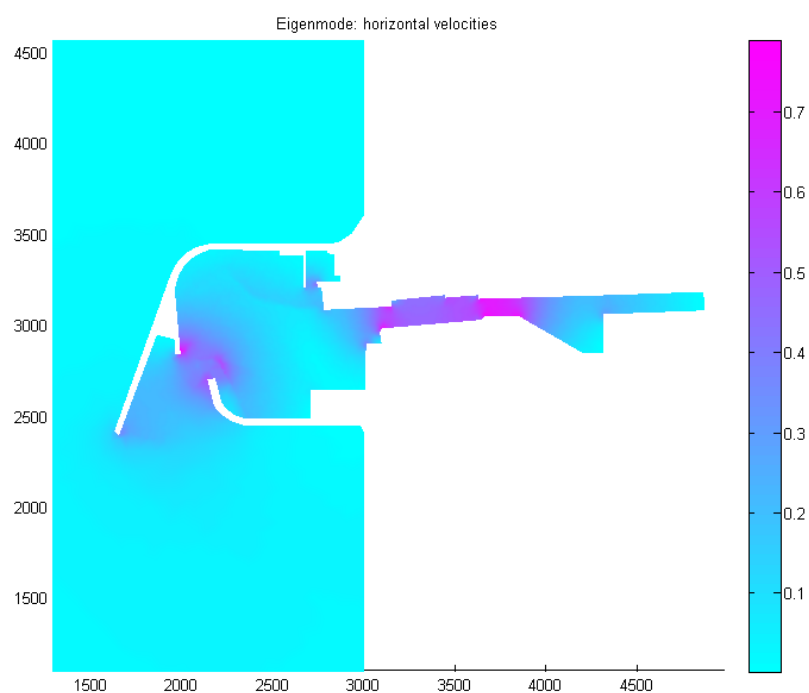


Figura 4.70 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=552.7$  s

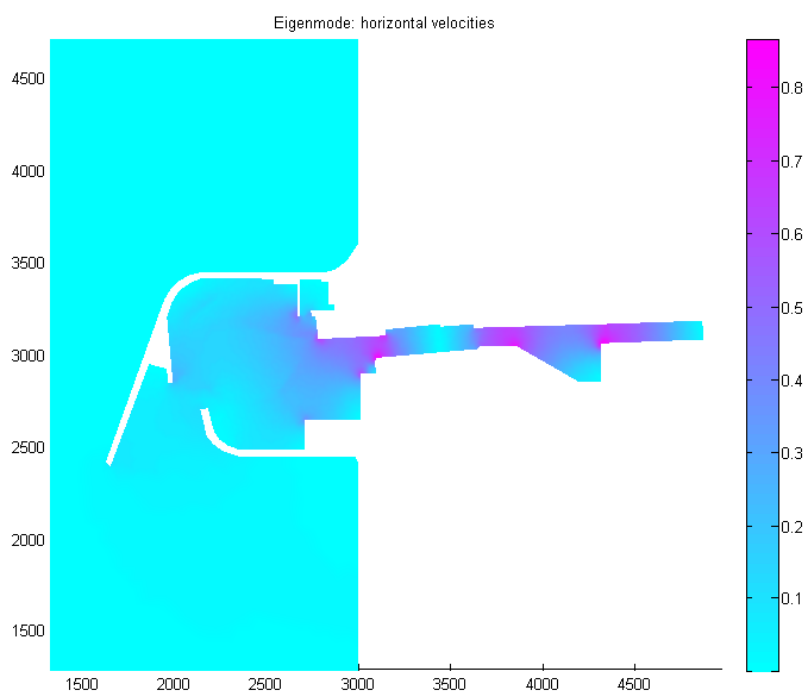


Figura 4.71 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=250$  s



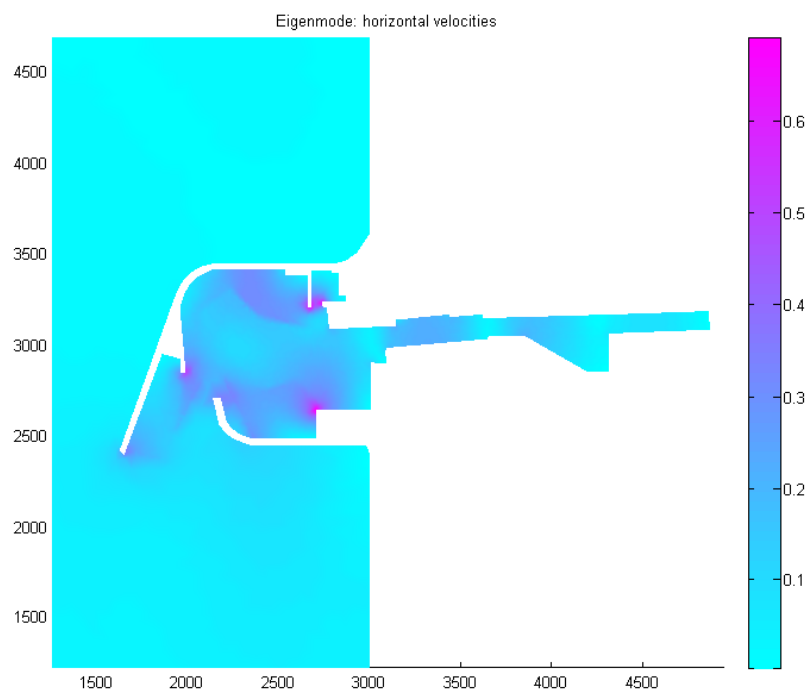


Figura 4.72 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=121.2$  s

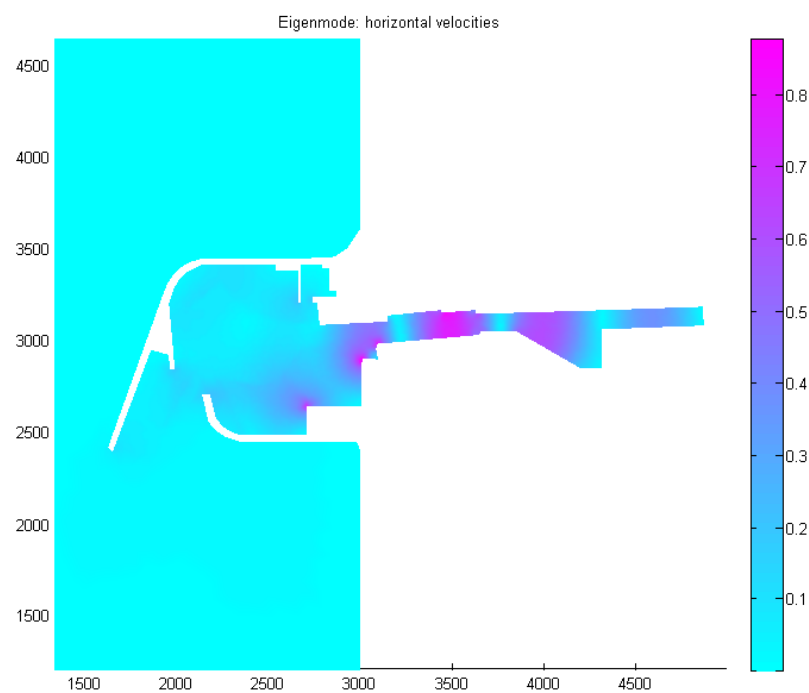


Figura 4.73 - Porto de Leixões. Diagrama de velocidades horizontais normalizadas para o período  $T=101.8$  s

Os resultados obtidos para os períodos próprios encontrados verificam a existência de fenómenos de ressonância no interior do porto.

O modo fundamental ( $T = 990.7$  s) é o modo que regista os maiores valores de coeficiente de amplificação  $|R|$  em todas as zonas do porto consideradas atingindo o valor 8.94 na entrada, 17.2 no terminal multiusos, 20.01 na marina, 50.49 na ponte móvel e 72.68 no terminal sul de contentores.

A zona da entrada do porto registou fenómenos de ressonância com amplificações na ordem de 7.42 para um período de 552.7 s e 6.71 para um período de 121.2 s. Existem velocidades de movimentos horizontais na entrada, que, para esses períodos, poderão ser significativas.

Na zona do terminal multiusos verificaram-se amplificações na ordem de 12.92 para o período de 121.2 s e 12.55 para o período de 552.7 seg. A magnitude dos movimentos horizontais registados são significativos.

Na marina de recreio foram registados coeficientes de amplificação de 15.46 e 13.86 para os períodos 552.7 s e 120.9 s, respetivamente. Embora a amplificação do segundo modo de oscilação seja superior, a magnitude dos movimentos horizontais para o período de 120.9 s tem mais influência.

Na ponte móvel observaram-se valores elevados de amplificação na ordem de 25.53 para um período de 101.8 s e 15.46 para um período de 552.7 s. Os movimentos horizontais registados têm magnitude significativa.

O terminal de contentores sul, nos primeiros modos, é o mais afetado registando valores de  $|R|$  iguais a 18.47 e 22.2 no segundo e terceiro modos, respetivamente. As velocidades horizontais, contudo, não são as mais significativas comparativamente com outras zonas.

No Anexo C estão representados os coeficientes de amplificação para outros modos ressonantes no interior da bacia, ângulos de fase e velocidades horizontais.

#### 4.3.4. CONCLUSÕES DA RESSONÂNCIA EM PORTOS

Após a aplicação do modelo numérico a portos reais podem ser tiradas algumas ilações.

A discretização do domínio através de elementos finitos não revela grandes problemas. Visto ser estudado o fenómeno de ressonância induzido por ondas longas, o espaçamento escolhido para as diferentes malhas de elementos triangulares garantindo um número mínimo de pontos por cada comprimento de onda é facilmente obtido. É importante, ainda assim, utilizar-se uma boa resolução de malha e um elevado número de pontos por comprimento de onda em zonas de baixa profundidade ou nas zonas de interesse. As zonas fronteiriças requerem um cuidado especial neste aspeto pois, como não são tidos em conta efeitos dissipativos na propagação das ondas para o interior do porto, a geometria do domínio é o fator responsável pelas condições de ressonância. É, por isso, imprescindível uma correta representação.

Os limites exteriores do domínio também requerem uma boa definição. Na fronteira semicircular utilizada como limite ao infinito foi imposta a condição de geração-radiação de onda plana não tendo em conta a diminuição da amplitude com o raio. Isto implica que o raio utilizado para o semicírculo seja suficientemente grande para que a fronteira aberta fique afastada o suficiente das zonas em que as ondas têm características maioritariamente cilíndricas. Nos casos testados, a fronteira imposta associada a um raio de três mil metros não introduziu modificações significativas nas condições de ressonância pois, como os comprimentos de onda são elevados, a onda radiada do domínio é uma onda plana.

As fronteiras fixas, como as paredes interiores dos portos, quebramares, molhes ou a linha de costa, devem ser consideradas obstáculos totalmente absorvedores devido à declividade das ondas de longo

período. Nos limites exteriores devem ser impostas condições de radiação ou de geração-radiação combinadas.



# 5

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo numérico de resolução da equação de Berkhoff (*mild slope equation*) aplicada a fundos de suave inclinação no estudo de ressonância em portos. A equação traduz a propagação de ondas monocromáticas tendo em conta os efeitos combinados da refração e difração. Os resultados foram apresentados em termos do coeficiente de amplificação sob a forma de curva de resposta de bacias portuárias com identificação de alguns dos períodos próprios e foram também apresentadas as velocidades dos movimentos horizontais.

O modelo foi verificado através do caso teste de uma bacia retangular aberta cujos resultados da resposta da bacia foram comparados com os resultados da solução teórica de Mei. O modelo não apresentou uma concordância completa relativamente aos valores teóricos apresentando valores de pico ressonantes mais baixos. Foi aumentada a resolução da malha e a extensão do domínio na tentativa de obter uma solução mais aproximada, pelo que o melhoramento foi pouco significativo. Contudo, o andamento das duas curvas de resposta é bastante semelhante e a resolução do problema de valores próprios ajudou a posicionar os picos ressonantes, melhorando a concordância.

De facto, as potencialidades da *PDE Toolbox* permitem ir além da determinação das curvas de resposta em oscilações forçadas. O tempo de cálculo é bastante reduzido o que possibilita um refinamento das malhas de elementos finitos para melhorar a solução, ainda que se tenham utilizado malhas relativamente bem refinadas. A solução do problema de valores próprios identifica corretamente as frequências próprias de oscilação sendo que os valores de  $\omega^2$  são todos reais positivos não havendo dissipação por radiação das ondas para o exterior do domínio.

Nos estudos de ressonância, como são tratadas onda de longo período, o espaçamento da malha normalmente não oferece grandes dificuldades na discretização do domínio. Na escolha do espaçamento da malha há que garantir um número de pontos por comprimento de onda no mínimo de 10 de maneira a definir com precisão o perfil da onda. No entanto, nas fronteiras fixas, como não são considerados quaisquer efeitos dissipativos, o espaçamento da malha deve representar o mais corretamente possível a geometria do domínio pois as condições ressonantes nas zonas interiores e zonas abrigadas irão depender exclusivamente dessa geometria.

Na discretização no domínio foram utilizadas plataforma de profundidade constante. A transição entre essas plataformas de diferentes profundidades não se dá na vertical mas de forma linear entre o ponto central dos últimos elementos na fronteira da primeira plataforma com o ponto central dos primeiros elementos da fronteira da plataforma seguinte.

O modelo foi aplicado a dois casos genéricos de bacias retangulares com diferentes posições de entrada e com diferentes graus de abertura e, posteriormente, a portos reais. Na determinação das curvas de

resposta, o modelo mostrou-se bastante adequado identificando claramente os picos ressonantes. A resolução numérica do problema de valores próprios permite a determinação exata dos períodos próprios ressonantes.

## 5.2. PERSPETIVAS E RECOMENDAÇÕES FUTURAS

Essencialmente, provou-se que o estudo de ressonância em bacias portuária através da aplicação de um modelo numérico resolvido em ambiente MATLAB® é uma excelente alternativa aos modelos já existentes. De facto, o esforço computacional e o tempo de cálculo demonstram-se bastante reduzidos pelo que torna esta uma ferramenta poderosa e flexível nos estudos de ressonância e de ondas longas.

Como desenvolvimentos futuros podem-se incluir:

- a transição entre plataformas de profundidade constante através de rampas de inclinação muito suave;
- a inclusão da dissipação de energia por atrito de fundo ou percolação e por rebentação através de um termo dissipativo a adicionar na equação de Berkhoff;
- aplicação da *PDE Toolbox* ao estudo de ondas curtas.

## BIBLIOGRAFIA

- Arnoldi WE. 1951. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematic*: 17-29.
- Avilez-Valente P. 2001. *Hidrodinâmica Marítima - Modelo de Difraccção-Refracção de Ondas do Mar, versão 1.1.*, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto.
- Battjes JA e Janssen JPFM. 1978. Energy Loss and Set-Up Due to Breaking of Random Waves. *16th International Conference on Coastal Engineering Proceedings*, ASCE, Hamburg.
- Behrendt L. 1985. A Finite Element Model for Water Wave Diffraction: Including Boundary Absorption and Bottom Friction, *Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark*.
- Berkhoff, JCW. 1972. Computation of Combined Refraction-Diffraction. *13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, Vancouver.
- Bettess P e Zienkiewicz OC. 1977. Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* no. 11:1271-1290.
- Booij N. 1983. A Note on the Accuracy of the Mild-Slope Equation. *Coastal Engineering* no. 7:191-203.
- Chen HS. 1986. Effects of Bottom Friction and Boundary Absorption on Water Wave Scattering. *Applied Ocean Research* no. 8:99-104.
- Chen HS e Houston JR. 1987. *Calculation of Water Oscillation in Coastal Harbors; HARBS and HARBD User's Manual*. Technical Report, Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, MS.
- Chen, HS e Mei CC. 1974. *Oscillations and Wave Forces in an Offshore Harbor: Applications of Hybrid Finite Element Method to Water-Wave Scattering*. Technical Report, Department of Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Cialone M A. 1991. *Coastal Modeling System (CMS) User's Manual*. Instruction Report CERC 91-1, U.S. Army Engineer Waterways Experimental Station, Vicksburg, MS.
- Cuthill E e McKee J. 1969. Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices. *Proceedings of the 24th National Conference*.
- Dally WR, Dean RG e Dalrymple RA. 1985. Wave Height Variation Across Beaches of Arbitrary Profile. *Journal of Geophysical Research: Oceans* no. 90:11917-11927.
- Dalrymple R A e Dean R G. 1991. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific.
- USACE 2002. *Coastal Engineering Manual*. Engineer Manual no. 1110:2-1100.
- Fortes CJEM. 1993. *Modelação Matemática da Refracção e Difraccção Combinadas de Ondas Marítimas. Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese de Mestrado, IST, Universidade Técnica de Lisboa.
- George A e. Liu JW. 1981. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Matrices*. Prentice-Hall.
- Hurdle DP, Kostense JK e Van den Bosch P. 1989. Mild-slope model for the wave behaviour in and around harbours and coastal structures in areas of variable depth and flow conditions. *Advanced in*

*Water Modeling and Measurement, The FluidEngineering Center, Cranfield, Bedford, England* 307-324.

Ippen AT e Goda Y. 1963. *Wave Induced Oscillations in Harbors: The Solution for a Rectangular Harbor Connected to the Open-Sea*. Technical Report no. 59, Hydrodynamics Laboratory, MIT, Cambridge M.A.

Kirby JT. 1984. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *Journal of Geophysical Research: Oceans* no. 89:745-747.

Korgen BJ. 1995. *Seiches*. American Scientists no. 83:330-341.

Kostense JK, Dingmans MW e Van den Bosch P. 1988. Wave-Current Interaction in Harbours. *Coastal Engineering Proceedings* no. 1.

Kostense JK, Meijer KL, Dingemans MW, Mynett AE e Van den Bosch P. 1986. Wave Energy Dissipation in Arbitrarily Shaped Harbours of Variable Depth. *Coastal Engineering Proceedings* no. 1.

Le Méhauté B e Wilson BW. 1962. Harbor Paradox (discussion). *J. Waterways Harbor Division*:173-195.

Lee JJ. 1969. Wave Induced Oscillations in Harbors of Arbitrary Shape. *Journal of Fluid Mechanics* 45.02: 375-394.

Lillycrop LS, Stanley JB, Michele SO, Briggs MJ e Harkins GS. 1993. *Barbers Point Harbor, Oahu, Hawaii Monitoring Study*. U.S. Army Engineer Waterways Experimental Station, Vicksburg, MS

Longuet-Higgins MS e Stewart RW. 1962. Radiation Stress and Mass Transport in Gravity Waves, with Application to 'Surf Beats'. *Journal of Fluid Mechanics* no. 13:481-504.

Losada IJ, Silva R e Losada MA. 1996a. 3-D Non-Breaking Regular Wave Interaction with Submerged Breakwaters. *Coastal Engineering* no. 28:229-248.

———. 1996b. Interaction of Non-Breaking Directional Random Waves with Submerged Breakwaters." *Coastal Engineering* no. 28:249-266.

Mei CC. 1983. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific (1989)

Mei CC e Benmoussa C. 1984. Long Waves Induced by Short-Wave Groups Over an Uneven Bottom. *Journal of Fluid Mechanics* no. 139:219-235.

Miles J e Munk W. 1961. Harbor Paradox. *Journal of the Waterways and Harbors Division*, ASCE no. 87:111-130.

Miles JW. 1974. Harbor Seiching. *Annual Review of Fluid Mechanics* no. 6:17-33.

Milne-Thomson LM. 1996. *Theoretical Hydrodynamics*. 5th Ed, Dover, Mineola, NY.

Munk, WH 1962. Long Waves. *The Sea*:647-663.

Panchang VG, Pearce BR, Wei G e Cushman-Roisin B. 1991. Solution of the Mild-Slope Wave Problem by Iteration. *Applied Ocean Research* no. 13:187-199.

Rabinovich, AB. 2009. Seiches and Harbour Oscillations. *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*, YC Kim:193-236.

Raichlen F e Lee JJ. 1992. Oscillation of Bays, Harbors and Lakes. *Handbook of Coastal and Ocean Engineering Analysis with Boundary Elements* no. 3.



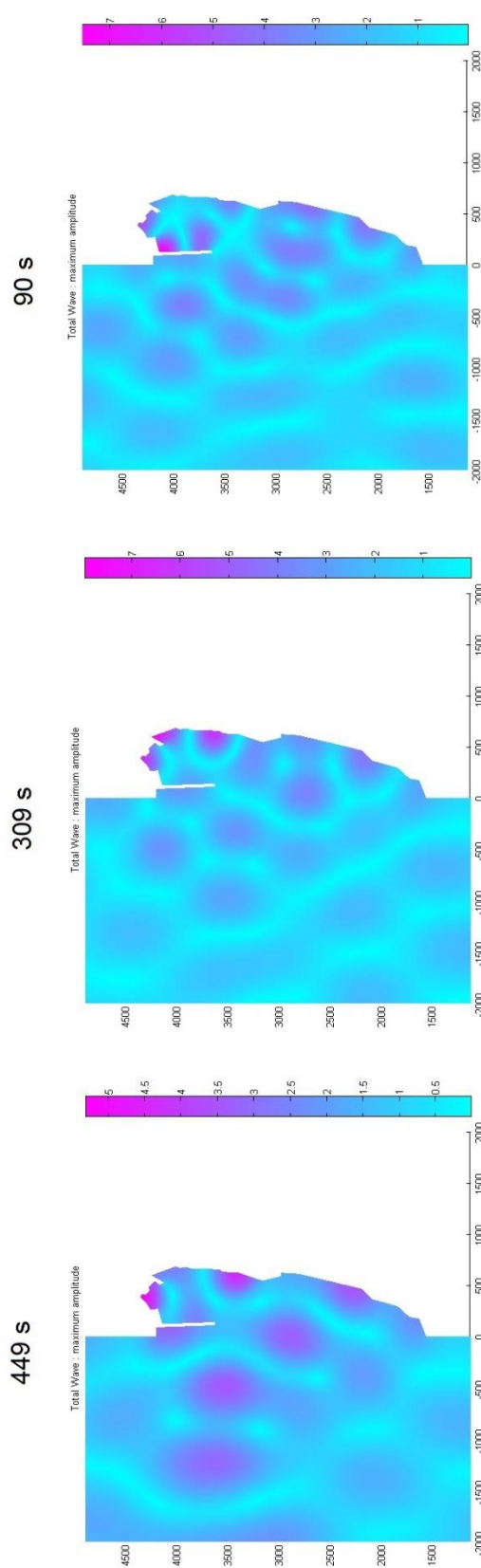
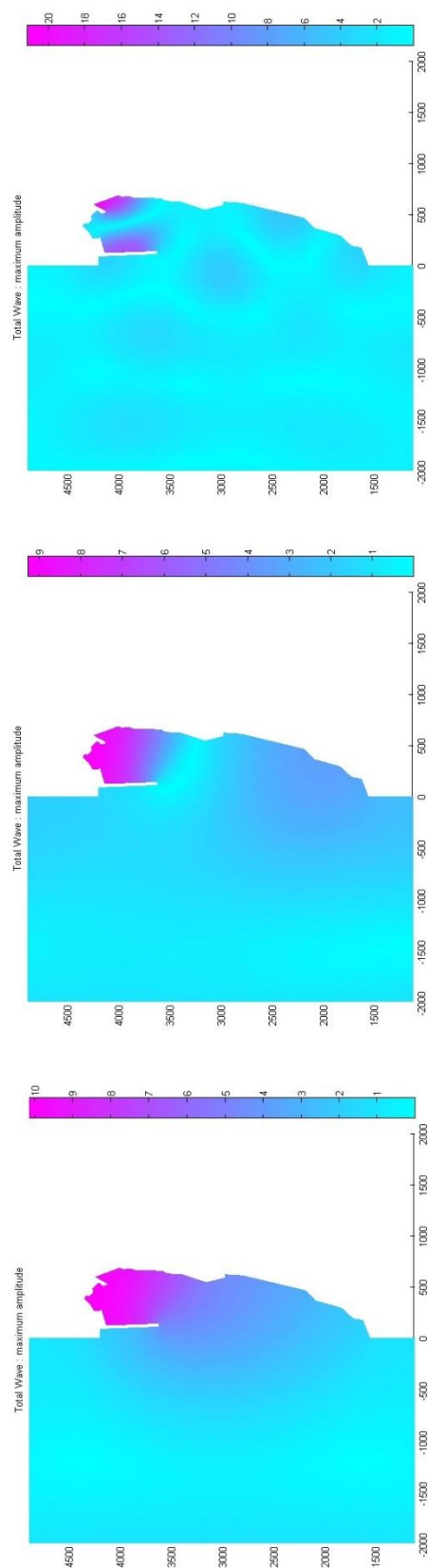
- Raichlen, F. 1966. Harbor Resonance. *Estuary and Coastline Hydrodynamics* no. 7:281-340.
- Raichlen, F. 1968. Motions of Small Boats Moored in Standing Waves. *Coastal Engineering Proceedings* 1:11.
- Rojanakamthorn S, Isobe M e Watanabe A. 1989. A Mathematical Model of Wave Transformation over a submerged breakwater. *Coastal Engineering in Japan* no. 32:209-234.
- Shewchuk, JR. 1996. Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering*, 203-222. Springer.
- Silva R, Salles P e Palacio A. 2002. Linear Waves Propagating Over a Rapidly Varying Finite Porous Bed." *Coastal Engineering* no. 44:239-260.
- Smith R e Sprinks T. 1975. Scattering of Surface Waves by a Conical Island. *Journal of Fluid Mechanics* no. 72:373-384.
- Veloso Gomes, F. 2002 Agitação Regular - Teoria Linear (Texto de apoio). *Apontamentos de Trabalhos Marítimos* 2.
- Zelt JA e Raichlen F. 1990. A Lagrangian Model for Wave-Induced Harbour Oscillations. *Journal of Fluid Mechanics* no. 213:203-225.
- Zelt, JA. 1986. Tsunamis: The Response of Harbours with Sloping Boundaries to Long Wave Excitation. *WM Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Division of Engineering and Applied Science, California Institute of Technology*
- Zienkiewicz OC. e Morgan K. 2006. *Finite Elements and Approximation*. Courier Dover Publications.



## **ANEXOS**

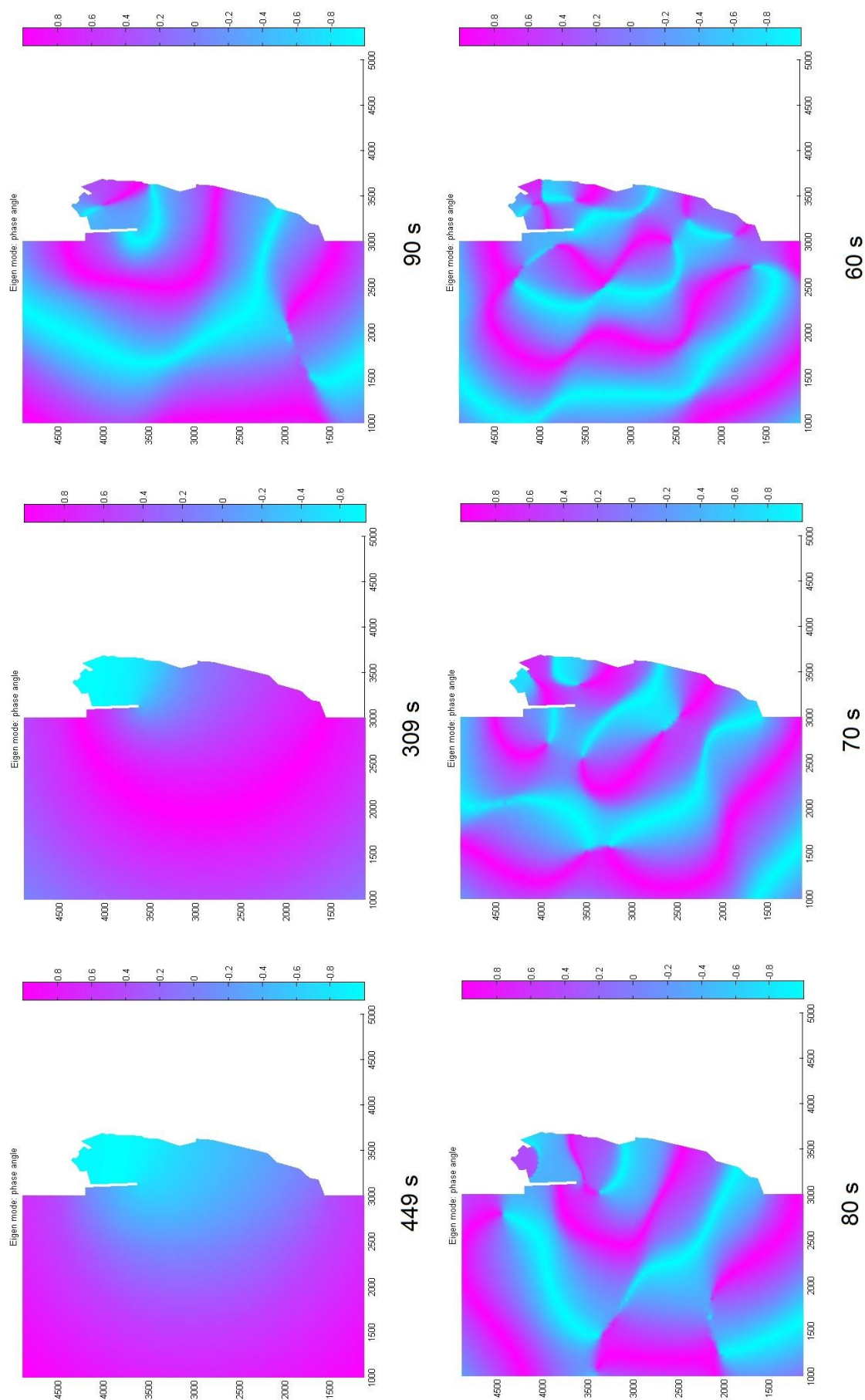


# ANEXO A – PORTO DA BALEEIRA



A.N. 1 – Porto da Baleeira. Coeficientes de amplificação para seis modos de oscilação

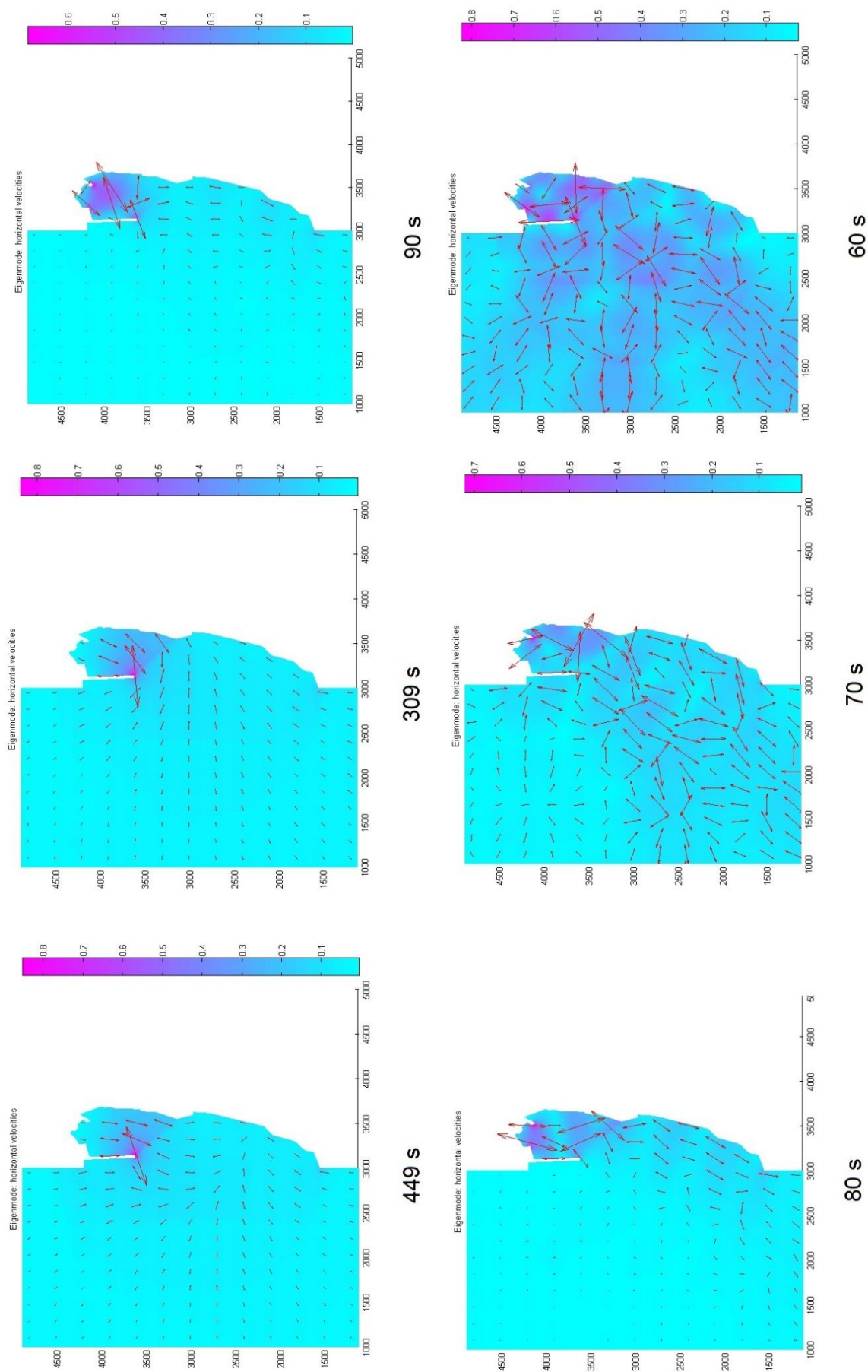




A.N. 2 – Porto da Baleeira. Ângulos de fase para seis modos de oscilação



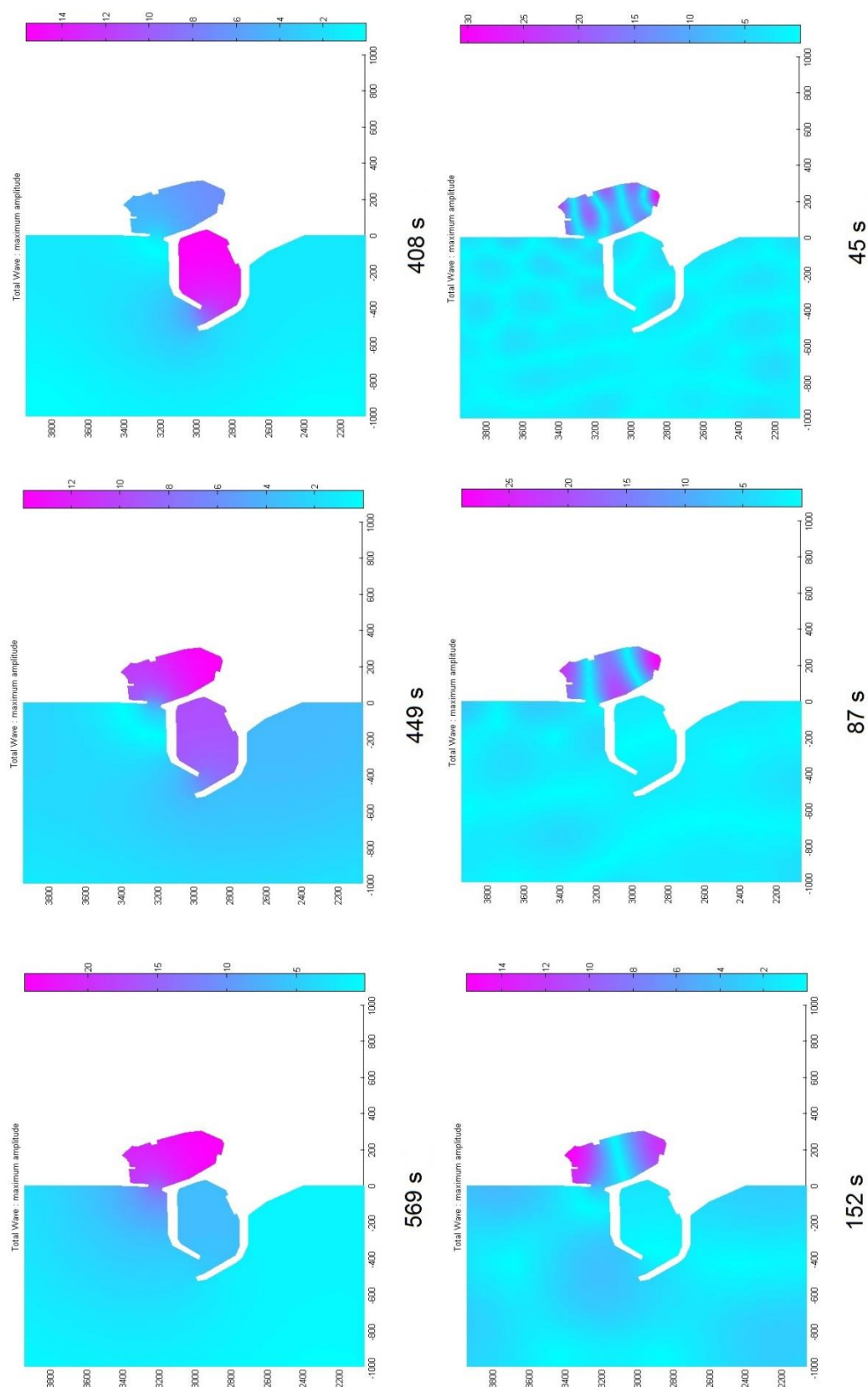




A.N. 3 – Porto da Baleeira. Velocidades horizontais normalizadas para seis modos de oscilação

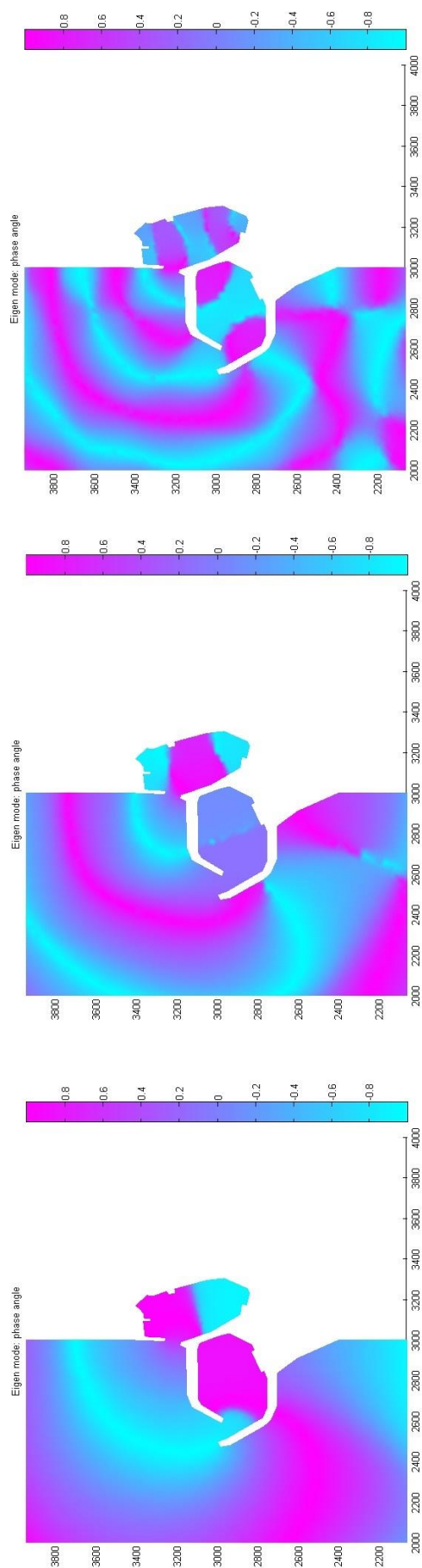
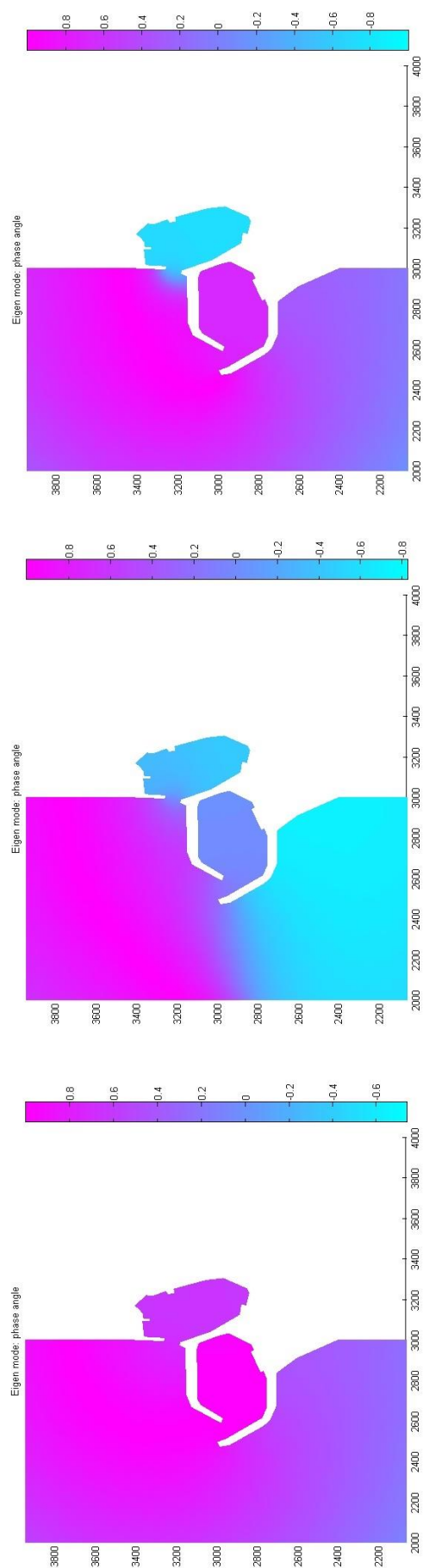


## ANEXO B – PORTO DE ST. QUAY-PORTRIEUX



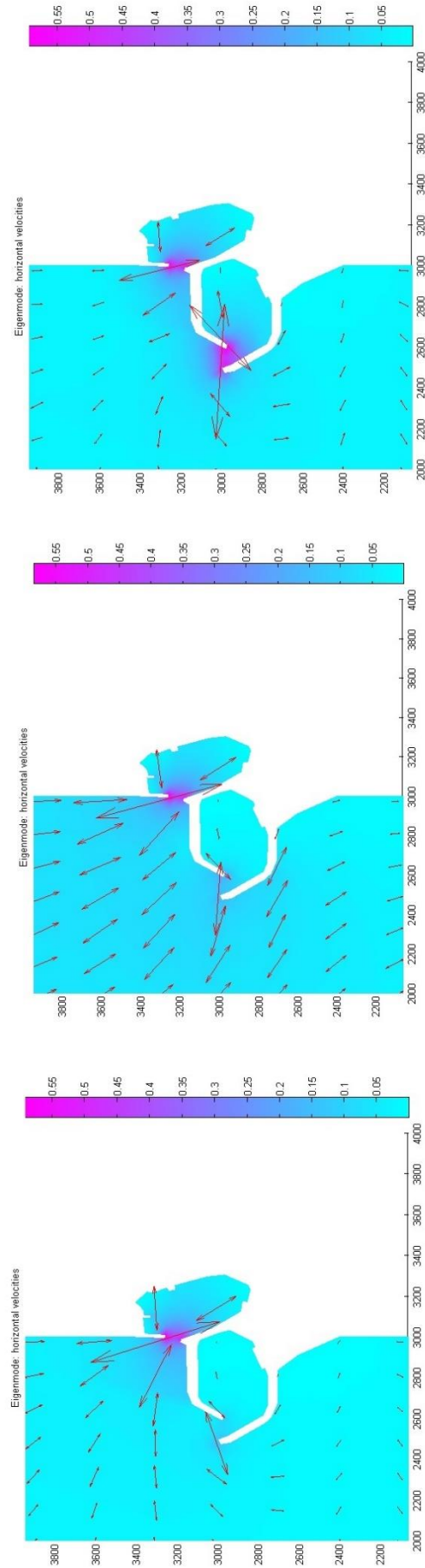
A.N. 4 – Porto de St. Quay-Portrieux. Coeficientes de amplificação para seis modos de oscilação





A.N. 5 – Porto de St. Quay-Portrieux. Ângulos de fase para seis modos de oscilação

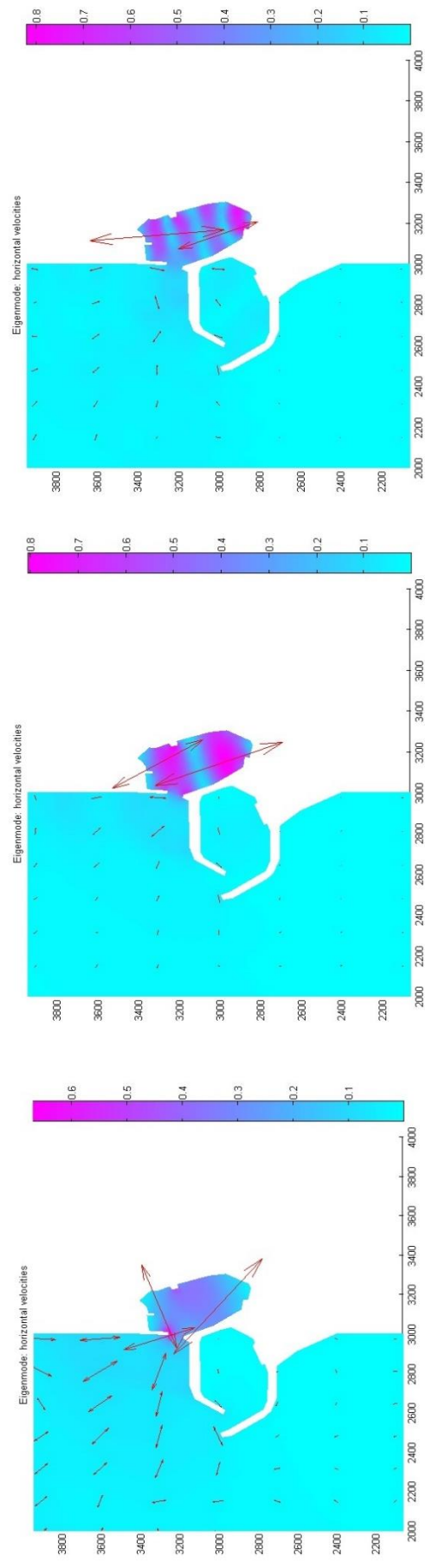




569 s

449 s

408 s



152 s

87 s

45 s

A.N. 6 – Porto de St. Quay-Portrieux. Velocidades horizontais normalizadas para seis modos de oscilação



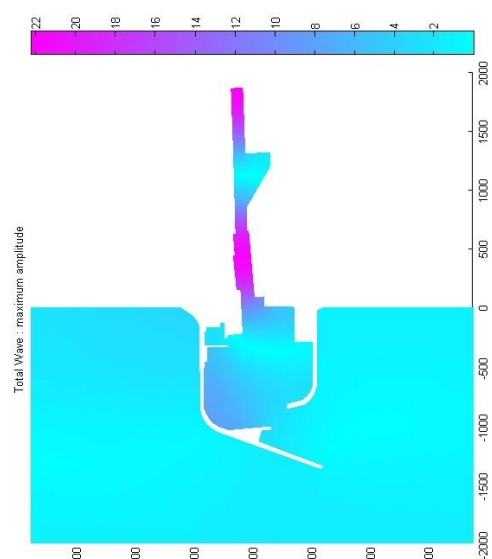


## ANEXO C – PORTO DE LEIXÕES

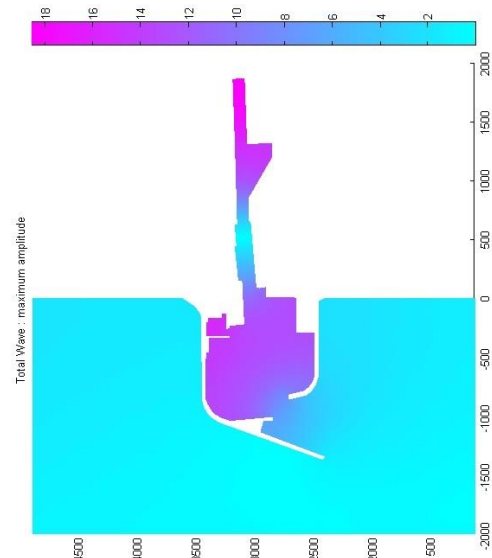


A.N. 7 – Porto de Leixões. Mapa do porto

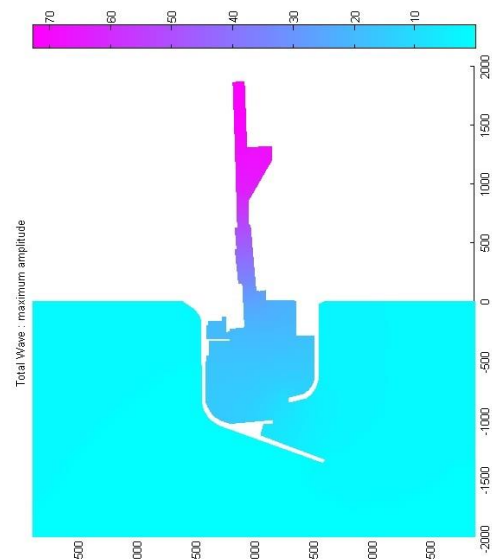




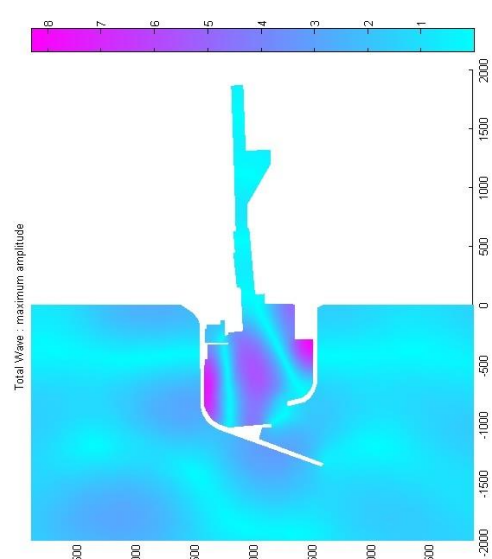
250 s



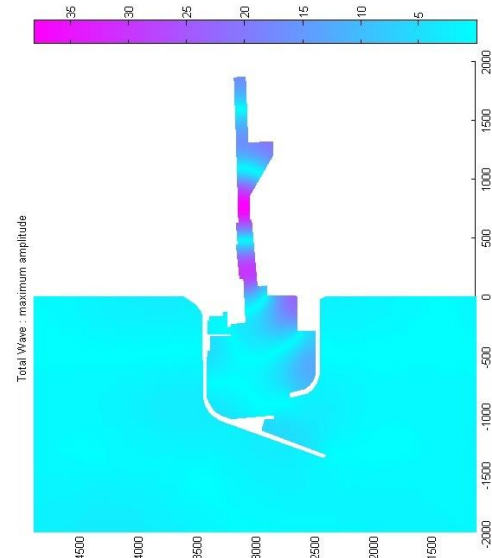
553 s



991 s



94 s

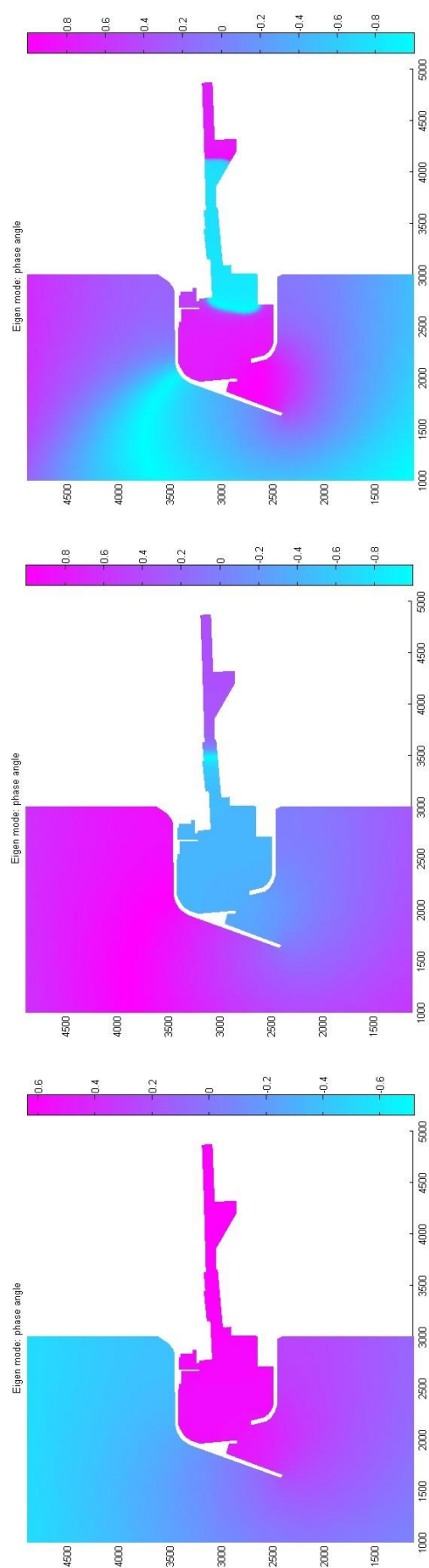


121 s

102 s

A.N. 8 – Porto de Leixões. Coeficientes de amplificação para seis modos de oscilação

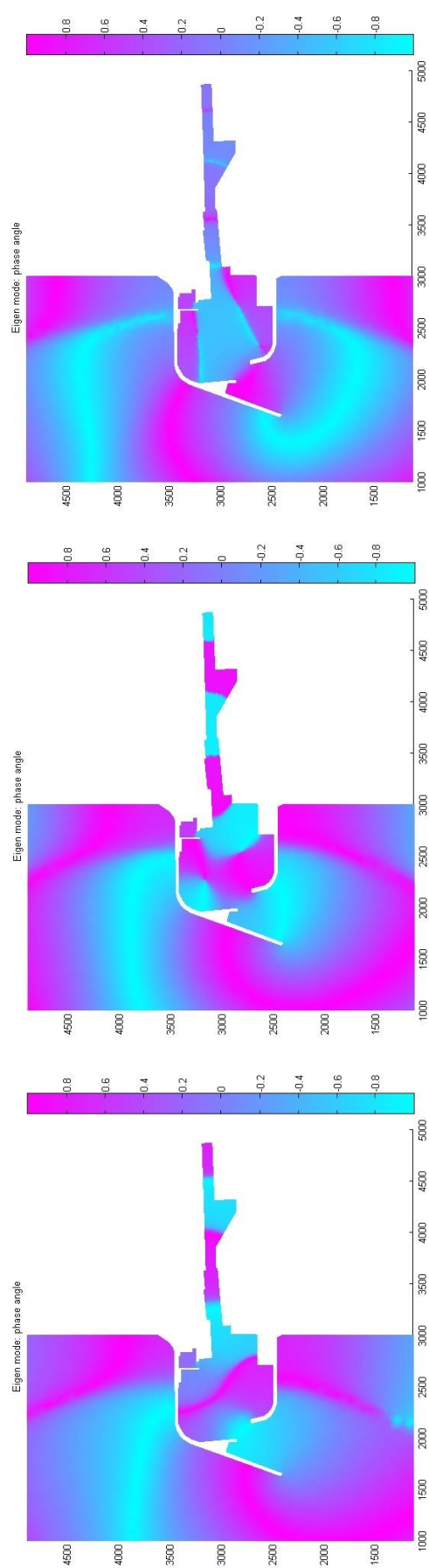




991 s

553 s

250 s



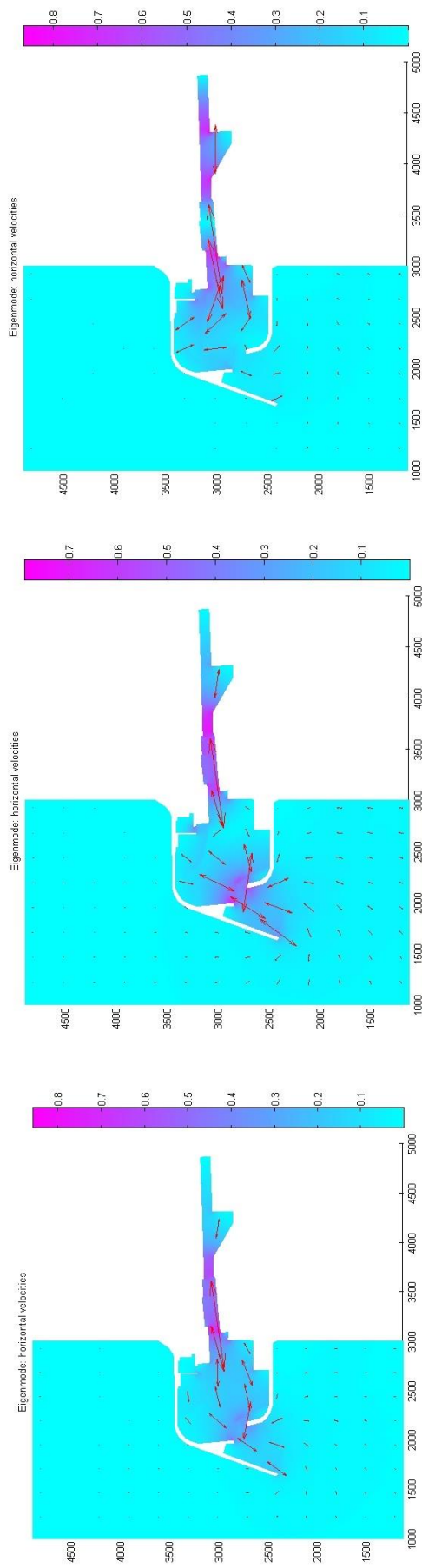
121 s

102 s

94 s

A.N. 9 – Porto de Leixões. Ângulos de fase para seis modos de oscilação

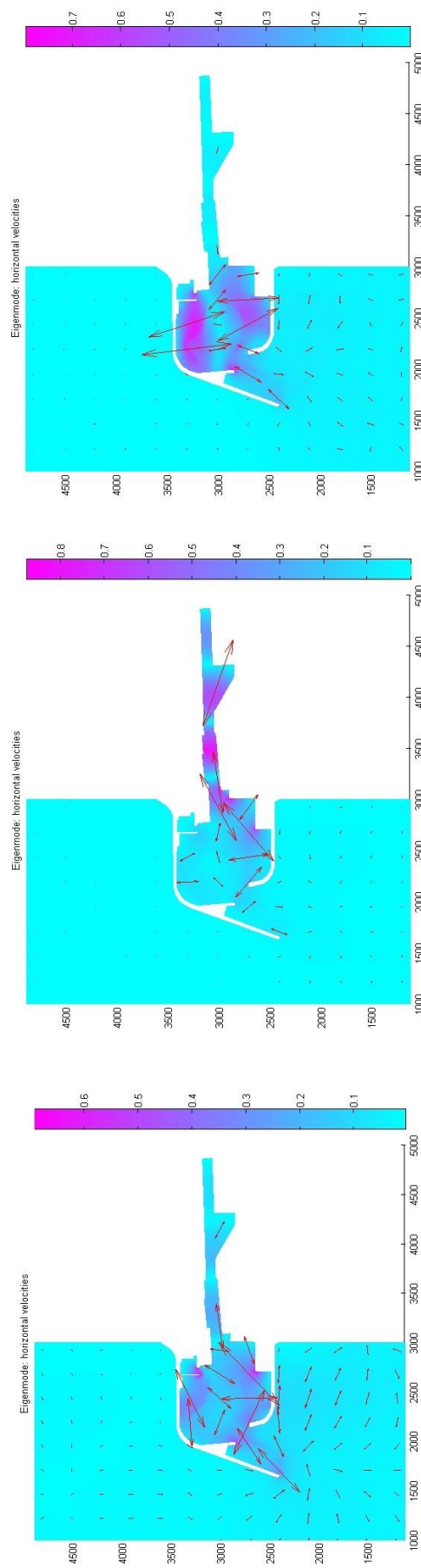




991 s

553 s

250 s



121 s

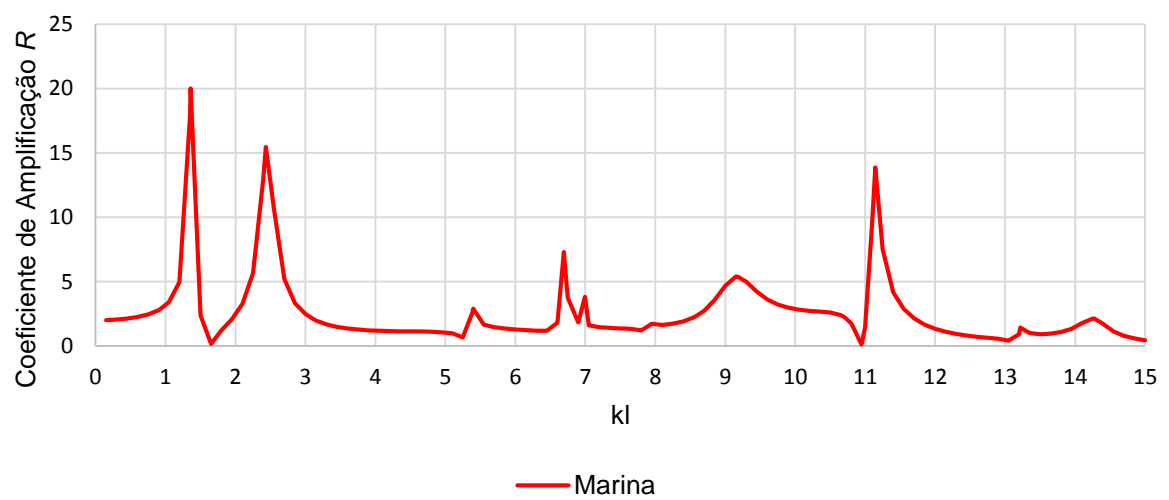
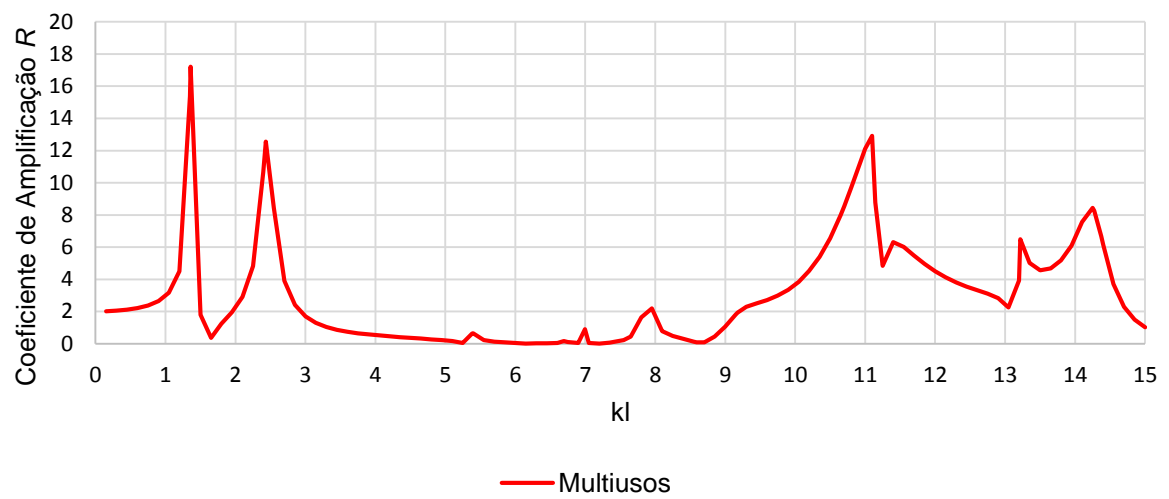
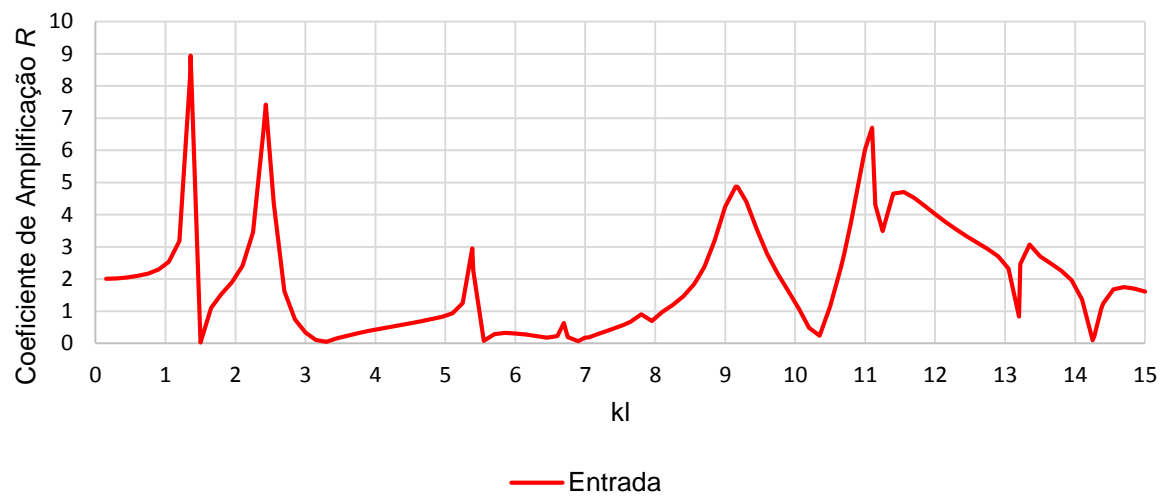
102 s

94 s

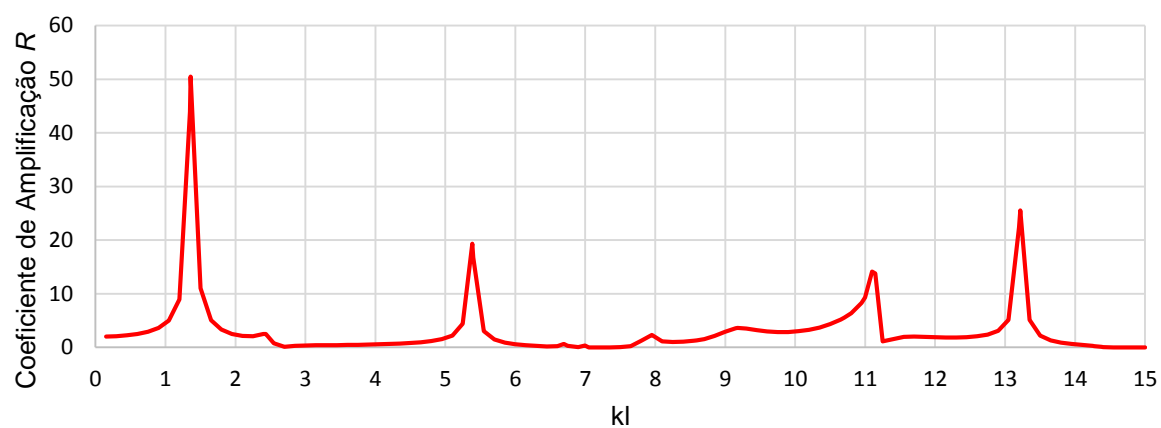
A.N. 10 – Porto de Leixões. Velocidades horizontais normalizadas para seis modos de oscilação



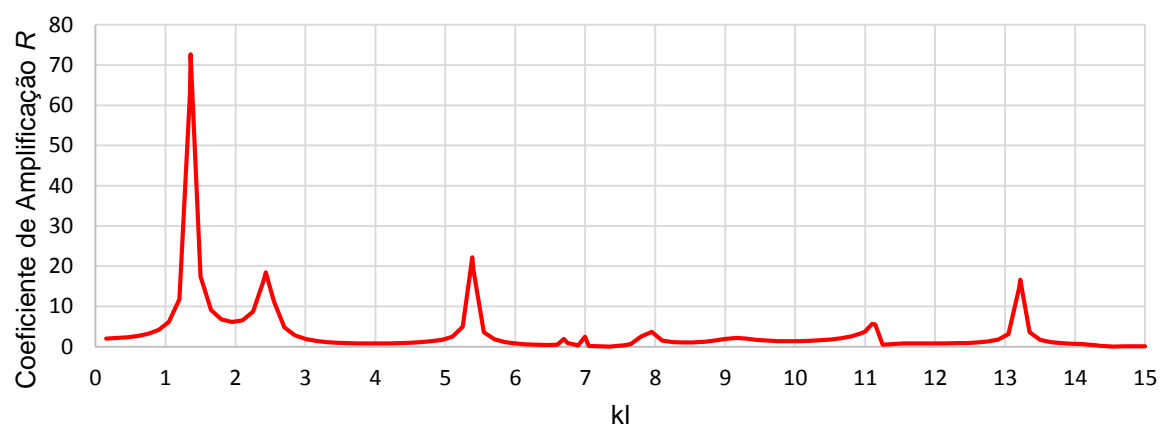




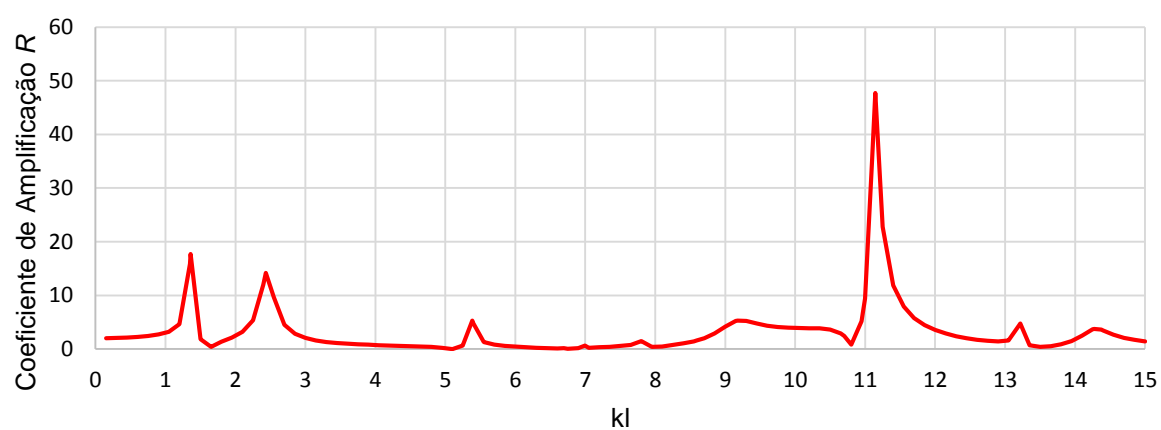




— Ponte Móvel



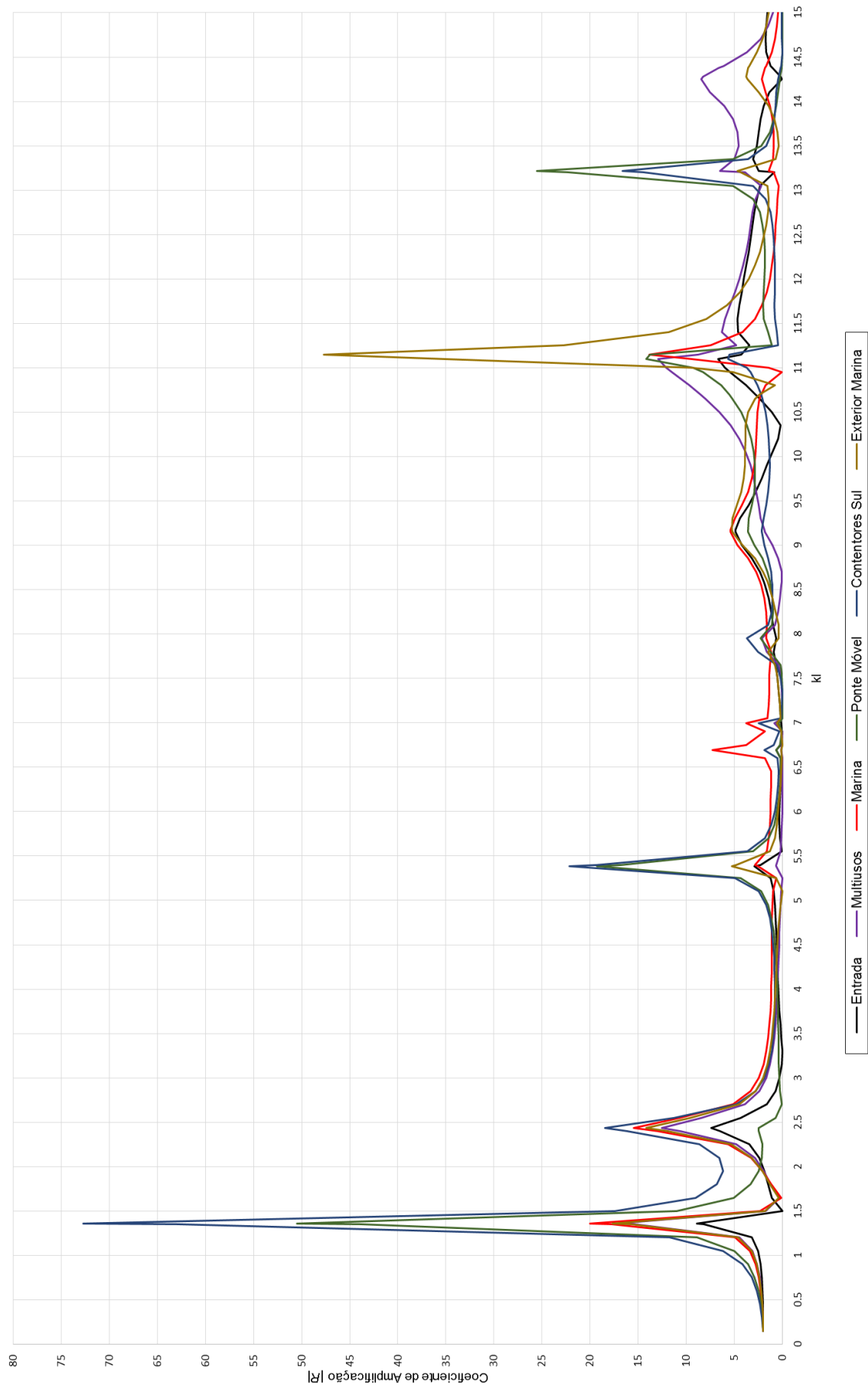
— Contentores Sul



— Exterior Marina

A.N. 11 – Porto de Leixões. Curvas de resposta corrigidas para diferentes zonas





A.N. 12 – Porto de Leixões. Curva de resposta do porto